Глава 6

Приложения поверхностного интеграла 1-го типа

6.1 Необходимые сведения

На прошлых занятиях мы уже освоили методы вычисления поверхностных интегралов 1-го типа, оперируя при этом преимущественно геометрическими категориями. Однако для лучшего понимания сути поверхностных интегралов имеет смысл взглянуть на них еще и с физической точки зрения. Поэтому сейчас мы продолжим обсуждение подобных интегралов, отталкиваясь от физических задач, к ним приводящих.

В самом деле, поверхностные интегралы 1-го типа находят широкое применение практически во всех разделах физики. Необходимость их вычисления диктуется потребностью отыскания интегральных свойств материальных поверхностей, вдоль которых распределена масса вещества, электрический заряд, задана теплоемкость или другие, меняющиеся от точки к точке, физические параметры поверхности. Перечисленные и иные физические свойства материальной поверхности как единого целого математически выражаются в форме поверхностных интегралов.

Поскольку очень трудно осветить все поистине необозримые возможности использования в физике поверхностного интеграла 1-го типа, ограничимся здесь лишь тем, что укажем некоторые его механические применения.

Напомним прежде всего, что если на всей поверхности $\mathcal{S}$ известна ее поверхностная плотность $\varrho(\vec{r})$, то полная масса вещества поверхности выражается поверхностным интегралом:

$$m = \iint\limits_{\mathcal{S}} \varrho(\vec{r})\, dS\,. \tag{6.1}$$

Другой важной механической характеристикой материальной поверхности служит *момент массы*

$$\vec{T} = \iint\limits_{\mathcal{S}} \varrho\, \vec{r}\, dS\,. \tag{6.2}$$

Поделив последний на общую массу m (1), получим *центр масс* поверхности:

$$\vec{r}_c = \frac{1}{m}\,\vec{T}\,. \tag{6.3}$$

Он играет важную роль при изучении движения тел: Центр масс всякого тела, в том числе и материальной поверхности, движется так, как если бы все внешние силы, действующие на тело, были приложены к центру масс. Если в пространстве задана декартова система координат (x, y, z), то вектор центра масс определяется своими проекциями на оси координат:

$$x_c = \frac{1}{m}\iint\limits_{S} x\varrho(x,y,z)\,dS\,, \quad y_c = \frac{1}{m}\iint\limits_{S} y\varrho(x,y,z)\,dS\,, \tag{6.4}$$

$$z_c = \frac{1}{m}\iint\limits_{S} z\varrho(x,y,z)\,dS\,.$$

При описании вращательной способности материальной поверхности вокруг некоторой оси необходимо знать *момент инерции* поверхности относительно данной оси. Обозначим за $r_\perp(M)$ расстояние точки M поверхности до указанной оси. Тогда момент инерции материальной поверхности выражается следующим поверхностным интегралом:

$$J = \iint\limits_{S} r_\perp^2(\vec{r})\,\varrho(\vec{r})\,dS\,. \tag{6.5}$$

Ценность понятия момента инерции для механики объясняется его связью с *энергией вращения*. Кинетическая энергия тела, вращающегося вокруг некоторой оси, равна половине момента инерции относительно этой оси, умноженной на квадрат угловой скорости ω вращения: $K = J\omega^2/2$.

6.2 Задачи в классе

Задача 6.1
(4352) Найти массу параболической оболочки

$$z = \frac{1}{2}\left(x^2 + y^2\right) \quad (0 \le z \le 1)\,,$$

плотность которой меняется по закону $\varrho = z$.

Решение 6.1 Масса оболочки выражается через ее плотность с помощью поверхностного интеграла (1). В нашем случае указанный интеграл имеет вид:

$$m = \iint\limits_{S} z\,dS\,.$$

Прежде чем вычислить его, запишем векторное уравнение параболической оболочки, взяв в качестве параметров полярные координаты ρ и φ в горизонтальной плоскости (x, y):

$$\vec{r}(\rho,\varphi) = \vec{i}\,\rho\cos\varphi + \vec{j}\,\rho\sin\varphi + \vec{k}\,\frac{\rho^2}{2}\,.$$

Векторное произведение, связывающее площади dS элементов поверхности и площади отвечающих им бесконечно малых прямоугольников $d\rho\, d\varphi$ на плоскости параметров, в данном случае равно:

$$[\vec{r}_\rho \times \vec{r}_\varphi] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \cos\varphi & \sin\varphi & \rho \\ -\rho\sin\varphi & \rho\cos\varphi & 0 \end{vmatrix} = -\vec{i}\,\rho^2\cos\varphi - \vec{j}\,\rho^2\sin\varphi + \vec{k}\rho\,.$$

Следовательно,

$$dS = |[\vec{r}_\rho \times \vec{r}_\varphi]|\; d\rho\, d\varphi = \rho\sqrt{1+\rho^2}\, d\rho\, d\varphi\,.$$

По укоренившейся привычке обсудим геометрический смысл правой части последнего равенства. Множитель ρ здесь равен якобиану преобразования от декартовых (x, y) к полярным (ρ, φ) координатам. Другой множитель $\sqrt{1+\rho^2}$ можно было бы найти, сообразив, что тангенс угла наклона γ плоскости, касательной к параболоиду в точке, отстоящей на расстоянии ρ от оси z, равен ρ. Найдем косинус угла γ, вспомнив школьную тригонометрию. А именно построив прямоугольный треугольник, с прилежащим катетом единичной длины и противолежащим углу γ катетом длины ρ. Косинус γ равен длине прилежащего катета, деленной на длину гипотенузы: $\cos\gamma = 1/\sqrt{1+\rho^2}$.

С учетом сказанного, искомый поверхностный интеграл сводится к повторному:

$$m = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\sqrt{2}} \frac{\rho^2}{2}\rho\sqrt{1+\rho^2}\, d\rho\,.$$

Последний, в силу симметрии области интегрирования и подынтегрального выражения, распадается на 2 определенных интеграла. Интеграл по φ равен 2π. Сведем оставшийся интеграл к табличному, сделав замену переменной интегрирования:

$$\sqrt{1+\rho^2} = t \quad \Rightarrow \quad \rho^2 = t^2 - 1 \quad \Rightarrow \quad \rho\, d\rho = t\, dt\,.$$

Это дает:

$$m = \pi \int_1^{\sqrt{3}} (t^2-1)t^2\, dt = \pi\left(\frac{t^5}{5} - \frac{t^3}{3}\right)\Bigg|_1^{\sqrt{3}} =$$

$$= \pi\left(\frac{9\sqrt{3}}{5} - \sqrt{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{3}\right) = \frac{\pi}{15}\left(27\sqrt{3} - 15\sqrt{3} - 3 + 5\right) = \frac{2\pi}{15}\left(6\sqrt{3}+1\right)\,.$$

Задача 6.2

(4354) Вычислить момент инерции однородной конической оболочки

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2} = 0 \quad (0 \le z \le b)\,,$$

постоянной плотности ϱ_0, относительно прямой

$$\frac{x}{1} = \frac{y}{0} = \frac{z-b}{0}\,.$$

Решение 6.2 Прямая, относительно которой требуется вычислить момент инерции, расположена вдоль оси x, на пересечении плоскостей $y = 0$ и $z = b$. Сам момент инерции равен интегралу по поверхности оболочки от ее плотности, умноженной на квадрат расстояния точек поверхности до прямой:

$$J = \varrho_0 \iint\limits_{\mathcal{S}} r_\perp^2 \, dS \,.$$

Найдем искомый квадрат расстояния $r_\perp^2$, опустив на указанную прямую, из точки с координатами (x, y, z), перпендикуляр. Очевидно, он достигает заданную прямую в точке с координатами $(x, 0, b)$. А значит квадрат длины перпендикуляра

$$r_\perp^2 = y^2 + (z-b)^2 \,.$$

Следовательно, искомый интеграл принимает вид:

$$J = \varrho_0 \iint\limits_{\mathcal{S}} \left(y^2 + (z-b)^2\right) \, dS \,.$$

Преобразуем интеграл к двойному, записав явное уравнение оболочки:

$$z = \frac{b}{a}\sqrt{x^2+y^2}$$

и спроектировав ее на горизонтальную плоскость (x, y). Принимая во внимание, что образующие конической оболочки наклонены к плоскости (x, y) под одним и тем же углом γ $(\tan\gamma = b/a)$, получим

$$dS = \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}} \, dx \, dy \,.$$

В итоге приходим к двойному интегралу:

$$J = \varrho_0 \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a} \iint\limits_{\sigma} \left[y^2 + \left(\frac{b}{a}\sqrt{x^2+y^2} - b\right)^2\right] dx \, dy \,.$$

Здесь σ −круг $x^2 + y^2 \le a^2$ в плоскости (x, y). Перейдя в интеграле к полярным координатам, будем иметь:

$$J = \frac{\varrho_0}{a}\sqrt{a^2+b^2} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a \left[\rho^2 \sin^2\varphi + \left(\frac{b}{a}\rho - b\right)^2\right] \rho \, d\rho \,.$$

Вычислим вначале интеграл от первого слагаемого:

$$\int_0^{2\pi} \sin^2\varphi \, d\varphi \int_0^a \rho^3 \, d\rho = \pi \int_0^a \rho^3 d\rho = \frac{\pi a^4}{4} \,.$$

Интеграл от второго слагаемого равен:

$$\frac{b^2}{a^2} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a (\rho-a)^2 \rho \, d\rho = 2\pi \, \frac{b^2}{a^2} \int_0^a \rho^2 (a-\rho) d\rho =$$
$$= 2\pi \frac{b^2}{a^2} \left(\frac{a\rho^3}{3} - \frac{\rho^4}{4}\right)\Bigg|_0^a = 2\pi b^2 a^2 \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) = \frac{\pi b^2 a^2}{6} \,.$$

Здесь мы для упрощения интеграла воспользовались тем геометрически очевидным фактом, что график функции $y = f(a-\rho)$ получается из графика $y = f(\rho)$ зеркальным отражением относительно вертикальной прямой $x = a/2$. В нашем случае это означает, что площади криволинейных трапеций, ограниченных кривыми $(\rho - a)^2\rho$ и $\rho^2(a-\rho)$, одинаковы.

Объединив вычисленные интегралы и домножив их на коэффициент при выписанном выше двойном интеграле, определяющем момент инерции оболочки, получим окончательно:

$$J = \varrho_0 \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}\left(\frac{\pi a^4}{4} + \frac{\pi b^2 a^2}{6}\right) = \varrho_0 \frac{\pi a}{12}\sqrt{a^2+b^2}\left(3a^2 + 2b^2\right) .$$

Чтобы детальнее осмыслить физический смысл и структуру той или иной обнаруженной закономерности, всегда полезно обследовать ее разные предельные случаи. Применительно к данной задаче, положив $b = 0$, найдем момент инерции

$$J = \varrho_0 \pi \frac{a^4}{4}$$

однородной круглой пластинки относительно оси, лежащей в плоскости круга и проходящей через его центр.

Исследуем другой предельный случай $a \to 0$. Здесь конус вырождается в “указку” — отрезок прямой, лежащий на оси y, соединяющий точки $y = 0$ и $y = b$ и обладающей линейной плотностью

$$\mu(y) = \mu_0 \frac{y}{b} \quad \text{где} \quad \mu_0 = 2\pi a \varrho_0 .$$

Выразив в решении задачи ϱ_0 через μ_0 и положив затем $a = 0$, найдем момент инерции “указки” относительно ее тяжелого конца:

$$J = \mu_0 \frac{b^3}{12} .$$

Задача 6.3

(4355) Найти координаты центра масс однородной поверхности

$$z = \sqrt{x^2 + y^2} ,$$

вырезанной цилиндром $x^2 + y^2 = ax$.

Решение 6.3 Радиус-вектор центра масс произвольной однородной поверхности задается интегралом:

$$\vec{r}_c = \frac{1}{m} \iint\limits_{S} \vec{r}\, dS ,$$

где m –масса поверхности, которую в данном контексте надо приравнять ее площади:

$$m = \iint\limits_{S} dS = \sqrt{2} \iint\limits_{\sigma} dx\, dy = \frac{\sqrt{2}}{4}\pi a^2 . \qquad (*)$$

Здесь σ –круг $(x-a/2)^2+y^2 \le a^2/4$ в плоскости (x,y), куда проектируется наша поверхность, а $\pi a^2/4$ –его площадь. Кроме того учтено, что косинус угла между образующими конуса и горизонтальной плоскостью равен $1/\sqrt{2}$.

Приступим к вычислению координат центра масс. Так:

$$x_c = \frac{1}{m}\iint\limits_{\mathcal{S}} x\,dS\,.$$

Перейдя к двойному интегралу по указанному кругу, имеем:

$$x_c = \frac{\sqrt{2}}{m}\iint\limits_{\sigma} x\,dxdy = \frac{1}{m_0}\iint\limits_{\sigma} x\,dxdy\,. \qquad (**)$$

Здесь мы еще раз обратили внимание, что площадь m $(*)$ исследуемого куска конической поверхности связана с площадью m_0 –круга в плоскости $z=0$ равенством: $m_0 = m/\sqrt{2}$. Отсюда и из $(**)$ заключаем, что искомая x координата центра масс обсуждаемой поверхности совпадает с x координатой центра масс круга. Очевидно, последняя равна $x_c = a/2$.

Аналогично, приняв во внимание симметрию рассматриваемой материальной поверхности относительно плоскости $y=0$, имеем: $y_c = 0$.

Вычислим наконец z координату центра масс. После перехода к двойному интегралу по указанному кругу и выбора полярной системы координат (ρ,φ) на плоскости (x,y), находим:

$$z_c = \frac{1}{m}\iint\limits_{\mathcal{S}} z\,dS = \frac{\sqrt{2}}{m}\iint\limits_{\sigma}\sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy =$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{m}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{a\cos\varphi}\rho^2\,d\rho = 2\frac{\sqrt{2}}{m}\frac{a^3}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^3\varphi\,d\varphi = \frac{4\sqrt{2}}{9m}a^3 = \frac{16}{9\pi}a\,.$$

В последнем равенстве учтено полученное ранее выражение $(*)$ для массы поверхности, а также попутно вычислен элементарный интеграл

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^3\varphi\,d\varphi = \int_0^1 (1-u^2)\,du \quad (u=\sin\varphi)\,.$$

Задача 6.4
(4357) С какой силой притягивает однородная усеченная коническая поверхность

$$x=\rho\cos\varphi\,, \quad y=\rho\sin\varphi\,, \quad z=\rho \quad (0\le\varphi\le 2\pi\,, 0<b\le\rho\le a)\,,$$

плотностью ϱ_0, материальную точку массы m, помещенную в вершине этой поверхности?

Решение 6.4 Из курса физики известно, что гравитационная сила, действующая на расположенную в точке $\vec{r}_0$ точечную массу, со стороны материальной поверхности $\mathcal{S}$ плотности ϱ, равна:

$$\vec{F} = \gamma m \iint\limits_{\mathcal{S}} \frac{\vec{r}-\vec{r}_0}{|\vec{r}-\vec{r}_0|^3}\varrho\,dS\,.$$

Здесь γ –гравитационная постоянная. В нашем случае $\vec{r}_0 = 0$, $\varrho = \varrho_0 = const$, и интеграл сводится к виду:

$$\vec{F} = \gamma m \varrho_0 \iint\limits_{S} \frac{\vec{r}}{r^3}\, dS\,.$$

Из соображений симметрии ясно, что искомая сила имеет лишь проекцию на ось z, равную:

$$F_z = \gamma m \varrho_0 \iint\limits_{S} \frac{z}{r^3}\, dS\,.$$

Сведем этот интеграл к двойному, спроектировав интегрируемый кусок конической поверхности на плоскость $z = 0$, в кольцо между концентрическими окружностями, радиусами b и a $(b < a)$. Выразим радиус-вектор поверхности через угловые координаты:

$$\vec{r} = \vec{i}\,\rho\cos\varphi + \vec{j}\,\rho\sin\varphi + \vec{k}\,\rho\,.$$

При этом векторное произведение, входящее в формулу перехода от поверхностного к двойному интегралу, равно:

$$[\vec{r}_\rho \times \vec{r}_\varphi] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \cos\varphi & \sin\varphi & 1 \\ -\rho\sin\varphi & \rho\cos\varphi & 0 \end{vmatrix} = -\vec{i}\rho\cos\varphi + \vec{j}\rho\sin\varphi + \vec{k}\rho\,.$$

Отсюда получаем:

$$dS = |[\vec{r}_\rho \times \vec{r}_\varphi]|\, d\rho\, d\varphi = \sqrt{2}\rho\, d\rho\, d\varphi\,.$$

Следовательно

$$F_z = \gamma m \varrho_0 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_b^a \frac{d\rho}{2\rho} = \gamma m \varrho_0 \pi \ln\frac{a}{b}\,.$$

Здесь учтено, что расстояние от материальной точки до точек поверхности следующим образом выражается через используемую в двойном интеграле радиальную координату:

$$r = \sqrt{2}\rho\,.$$

6.3 Домашнее задание

4352.1, 4352.2, 4353

Задача 6.5
(4352.1) Найти массу полусферы

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2 \qquad (z \geq 0)\,,$$

плотность которой в каждой ее точке $M(x, y, z)$ *равна* z/a.

Решение 6.5 Искомая масса выражается в данном случае поверхностным интегралом:

$$m = \frac{1}{a} \iint\limits_{\mathcal{S}} z\, dS\,. \qquad (*)$$

Запишем векторное параметрическое уравнение полусферы в виде:

$$\vec{r}(\theta, \varphi) = \vec{i}\, a \sin\theta \cos\varphi + \vec{j}\, a \sin\theta \sin\varphi + \vec{k}\, a \cos\theta$$

$$(0 \le \varphi \le 2\pi\,, \quad 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}\,)\,.$$

При этом

$$dS = |[\vec{r}_\theta \times \vec{r}_\varphi]|\; d\theta\, d\varphi = a^2 \sin\theta\, d\theta\, d\varphi\,.$$

Соответственно

$$m = \frac{1}{a} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} a^3 \cos\theta \sin\theta\, d\theta = 2\pi a^2\; \frac{\sin^2\theta}{2}\bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \pi a^2\,.$$

Замечание 6.1 Данный результат можно получить с помощью более наглядных геометрических рассуждений. Покажем это, сведя поверхностный интеграл $(*)$ к двойному, по кругу $\sigma\,:\; x^2 + y^2 \le a^2$ в горизонтальной плоскости $z = 0$:

$$m = \iint\limits_{\sigma} \frac{z}{a} \frac{dx\, dy}{\cos\gamma}\,.$$

Здесь как и всюду ранее γ –угол между плоскостью касательной к сфере в рассматриваемой точке и горизонтальной плоскостью. Последний, как мы знаем, совпадает с углом θ между осью z и нормалью к сфере в выбранной точке. Поскольку

$$\frac{z}{a} = \cos\theta = \cos\gamma\,,$$

то из предыдущего интегрального равенства сразу заключаем, что искомая масса численно равна площади круга, куда проектируется полусфера: $m = \pi a^2$.

Задача 6.6

4352.2 Найти моменты однородной треугольной пластинки

$$x + y + z = a \quad (\,x \ge 0\,, \quad y \ge 0\,, \quad z \ge 0\,)$$

относительно координатных плоскостей.

Решение 6.6 Моментом массы материальной поверхности $\mathcal{S}$ относительно некоторой плоскости называют интеграл по данной поверхности от произведения ее плотности на расстояние от текущей точки поверхности до указанной плоскости. В нашем случае, в силу симметрии расположения пластинки, достаточно вычислить лишь один из статических моментов. Например относительно плоскости $z = 0$. Он следующим образом выражается через поверхностный интеграл:

$$M_{xy} = \iint\limits_{\mathcal{S}} z\, dS\,.$$

Перейдем к двумерному интегралу, спроектировав поверхность на указанную плоскость и заметив, что $dS = \sqrt{3}\,dx\,dy$. Таким образом, имеем:

$$M_{xy} = \sqrt{3}\int_0^a dx \int_0^{a-x} (a-x-y)\,dy = \sqrt{3}\int_0^a dx \frac{(a-x-y)^2}{2}\Big|_{a-x}^{0} =$$
$$\frac{\sqrt{3}}{2}\int_0^a (a-x)^2\,dx = -\frac{\sqrt{3}}{6}\,(a-x)^3\big|_0^a = \frac{a^3}{2\sqrt{3}}\,.$$

Задача 6.7

(4353) Вычислить момент инерции, относительно оси Oz, однородной сферической оболочки

$$x^2+y^2+z^2=a^2 \quad (z \geq 0)\,,$$

плотности ϱ_0.

Решение 6.7 Искомый момент выражается поверхностным интегралом:

$$J_z = \varrho_0 \iint\limits_{S} (x^2+y^2)\,dS\,.$$

Зададим векторное параметрическое уравнение поверхности

$$\vec{r}(\varphi,\theta) = \vec{i}\,a\cos\theta\cos\varphi + \vec{j}\,a\cos\theta\sin\varphi + \vec{k}\,a\sin\theta$$
$$(0 \leq \varphi \leq 2\pi\,, \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2})\,.$$

При этом

$$dS = |[\vec{r}_\varphi \times \vec{r}_\theta]|\,d\varphi\,d\theta = a^2\cos\theta\,d\varphi\,d\theta\,.$$

Кроме того

$$x^2+y^2 = a^2\left(\cos^2\theta\cos^2\varphi + \cos^2\theta\sin^2\varphi\right) = a^2\cos^2\theta\,,$$

и наш поверхностный интеграл преобразуется к виду:

$$J_z = \varrho_0\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} a^4\cos^3\theta\,d\theta =$$
$$2\pi a^4\varrho_0 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1-\sin^2\theta\right)\,d\sin\theta = \frac{4}{3}\pi a^4\varrho_0\,.$$

Замечание 6.1 Обратим внимание, что в данной задаче мы взяли не ту сферическую систему координат, которой пользовались до сих пор. В данном случае мы отсчитывали угол θ от экватора, в то время как ранее всегда отсчитывали его от вертикальной оси z. Сделано это намеренно, чтобы обратить ваше внимание на возможность иного определения сферических координат. На практике почти одинаково часто используют как "нашу", так и примененную в данной задаче сферическую систему координат.