Глава 7

Поверхностные интегралы 2-го типа

7.1 Необходимые сведения из теории

Основательно освоившись на предыдущих занятиях с поверхностными интегралами 1-го типа, перейдем ко второму типу поверхностных интегралов, играющих для физических приложений существенно более важную роль, чем поверхностные интегралы 1-го типа. Это связано с тем, что поверхностные интегралы 2-го типа приспособлены для вычисления *потоков* самых разнообразных физических величин — потоков тепла, жидкости, электрического поля — через выделенные участки поверхностей.

При определении потока, а вместе с ним и поверхностного интеграла 2-го типа, принципиальную роль играет понятие *стороны поверхности*, сквозь которую направлен поток. Поэтому прежде всего выясним, что подразумевают под стороной поверхности. Напомним, в каждой внутренней (не принадлежащей границе) точке гладкой поверхности можно указать два направления, перпендикулярные поверхности в данной точке. Выделив одно из них — испустив единичный вектор нормали $\vec{n}$ в заданном направлении — определяют сторону поверхности в указанной точке. Как правило, задание стороны гладкой поверхности в одной ее точке автоматически выделяет сторону всей поверхности. Для этого по поверхности проводят кривую, соединяющую исходную точку с произвольной точкой поверхности, и движутся от исходной к искомой точке, непрерывно перестраивая направление нормали к точкам кривой.

Оказывается однако, что описанная процедура позволяет однозначно указать сторону — совокупность всех точек поверхности с приписанными им упомянутым способом направлениями вектора нормали, лишь в случае *двусторонней поверхности*.

Определение 7.1 *Гладкую поверхность $\mathcal{S}$ называют двусторонней, если обход по любому замкнутому контуру, лежащему на поверхности $\mathcal{S}$ и не имеющему общих точек с ее границей, не меняет направление нормали к поверхности.*

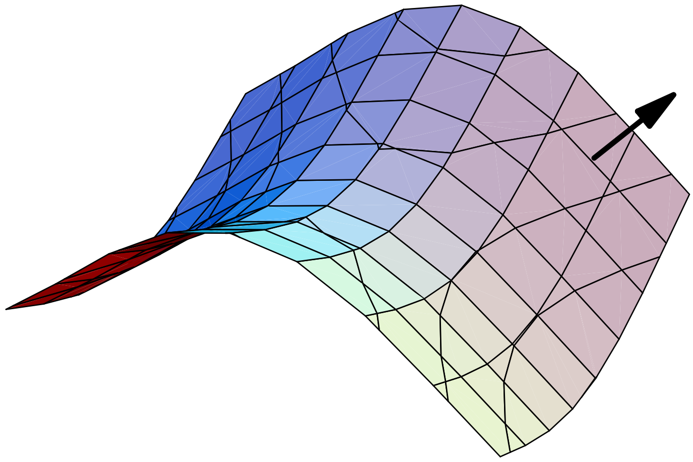

Рис. 7.1: Типичный пример двусторонней поверхности. На графике изображен также вектор нормали, испущенный из точки выбранной стороны поверхности.

Чтобы различать стороны некоторой гладкой двусторонней поверхности $\mathcal{S}$, обозначим за $\mathcal{S}^+$ ту ее сторону, из которой испущен единичный вектор нормали $\vec{n}$.

Большинство встречающихся поверхностей –двусторонние. Однако существуют и односторонние поверхности. Так называют поверхности, где имеется хотя бы один замкнутый контур, при обходе которого направление нормали меняется на противоположное. Примером односторонней поверхности служит знаменитый лист Мебиуса. Его можно получить, склеив два конца плоской ленточки, предварительно повернув один из них на 180 градусов.

Вернемся к определению поверхностного интеграла 2-го типа. Проще всего сконструировать его в некоторой декартовой системе координат, где компонентами единичного вектора нормали $\vec{n}$ служат *направляющие косинусы* — косинусы углов наклона нормали к осям координат:

$$\vec{n}(\vec{r}) = \{\cos\alpha,\, \cos\beta,\, \cos\gamma\}\,. \tag{7.1}$$

Здесь

$$\alpha = (\widehat{\vec{n}, x})\,, \quad (\widehat{\vec{n}, y})\,, \quad (\widehat{\vec{n}, z})\,,$$

–углы между нормалью $\vec{n}$ и осями координат. Косинусы этих углов равны скалярным произведениям вектора $\vec{n}$ и *ортов* $\{\vec{i},\, \vec{j},\, \vec{k}\}$ –единичных векторов, расположенных вдоль осей декартовой системы координат:

$$\cos\alpha = (\vec{n}\cdot\vec{i})\,, \quad \cos\beta = (\vec{n}\cdot\vec{j})\,, \quad \cos\gamma = (\vec{n}\cdot\vec{k})\,.$$

Пусть в каждой точке двусторонней поверхности $\mathcal{S}$ определены три непрерывные функции

$$P = P(x,y,z)\,, \quad Q = Q(x,y,z)\,, \quad R = R(x,y,z)\,. \tag{7.2}$$

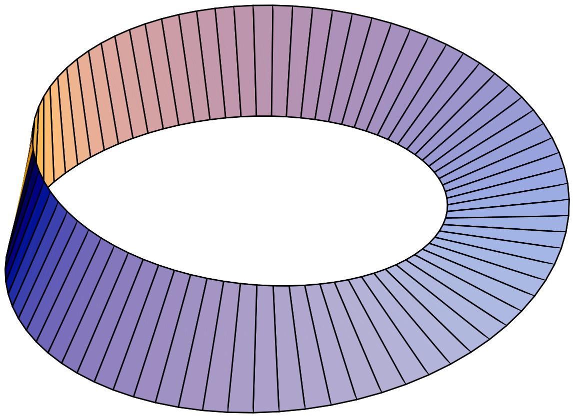

Рис. 7.2: Лист Мебиуса. На рисунке хорошо видно, что если пойти поперек линий вдоль листа, отслеживая непрерывное изменение вектора нормали, то при возвращении в исходную точку направление нормали сменится на противоположное.

Определение 7.2 *Поверхностный интеграл 2-го типа равен следующему поверхностному интегралу 1-го типа:*

$$I = \iint\limits_{\mathcal{S}} \left(P \cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma\right)\, dS\,. \tag{7.3}$$

Замечание 7.1 Нетрудно сообразить, что данное определение имеет смысл лишь для двусторонних поверхностей, для которых можно однозначно указать направление нормали во всех точках поверхности.

Замечание 7.2 Функции (2) естественно интерпретировать как компоненты, в декартовой системе координат (x, y, z), некоторого векторного поля:

$$\vec{A}(\vec{r}) = \vec{i}\, P + \vec{j}\, Q + \vec{k}\, R\,. \tag{7.4}$$

При этом подынтегральное выражение в (3) равно скалярному произведению вектора $\vec{A}(\vec{r})$ и нормали в соответствующей точке поверхности. Поэтому поверхностный интеграл 2-го типа физики часто предпочитают записывать в другой, более компактной и не зависящей от конкретного задания системы координат, форме:

$$I = \iint\limits_{\mathcal{S}} \left(\vec{A}\cdot\vec{n}\right)\, dS\,. \tag{7.5}$$

Напомним, поверхностный интеграл 2-го типа имеет ясный физический смысл: Он равен сумме потоков векторного поля $\vec{A}(\vec{r})$ через составляющие поверхность элементарные площадки dS в направлениях вектора нормали $\vec{n}$, своего для каждой элементарной площадки. Подчеркнем еще, что при переходе к другой стороне поверхности (от $\mathcal{S}^+$ к $\mathcal{S}^-$), поверхностный интеграл 2-го типа меняет знак на обратный.

Замечание 7.3 Математики обычно пользуются другой формой записи поверхностного интеграла 2-го типа:

$$\iint\limits_{S^+} P\,dy\,dz + Q\,dz\,dx + R\,dx\,dy\,, \tag{7.6}$$

символизирующей тот факт, что первое слагаемое в интеграле равно потоку вектора $\vec{A}$ через проекцию элементарной площадки dS поверхности на плоскость, параллельную координатной плоскости (y, z), и так далее.

Для вычисления поверхностного интеграла 2-го типа его необходимо выразить через двойной интеграл по некоторой плоской области. Укажем как это можно сделать. Пусть интегрируемая поверхность задана в векторной параметрической форме:

$$\vec{r} = \vec{i}\,x(u,v) + \vec{j}\,y(u,v) + \vec{k}\,z(u,v)\,, \tag{7.7}$$

где x, y, z –непрерывно-дифференцируемые функции параметров u, v, а исследуемая поверхность $\mathcal{S}$ взаимно-однозначно проектируется этой векторной функцией на некоторую квадрируемую область Ω плоскости (u, v). Тогда поверхностный интеграл 2-го типа по заданной поверхности $\mathcal{S}$ сводится к двойному интегралу по области Ω.

Установим вид двойного интеграла. Для этого сконструируем единичный вектор нормали с помощью векторов $\vec{r}_u$ и $\vec{r}_v$, касательных к поверхности в рассматриваемой точке. Обратим внимание, что векторное произведение указанных векторов перпендикулярно касательной плоскости к поверхности, то есть направлено по нормали к ней. Поделив векторное произведение на его модуль, найдем искомый единичный вектор нормали:

$$\vec{n} = \frac{[\vec{r}_u \times \vec{r}_v]}{|[\vec{r}_u \times \vec{r}_v]|}\,. \tag{7.8}$$

Осталось заметить, что данная формула справедлива, лишь если входящее сюда векторное произведение направлено в ту же сторону, что и выбранное направление нормали к поверхности. Чтобы это было действительно так, векторы

$$\vec{r}_u\,, \quad \vec{r}_v\,, \quad \vec{n}\,,$$

должны образовывать правую тройку. В противном случае надо поменять местами векторы $\vec{r}_u$ и $\vec{r}_v$.

Вспомнив еще знакомое из теории поверхностных интегралов 1-го типа соотношение

$$dS = |[\vec{r}_u \times \vec{r}_v]|\,du\,dv\,, \tag{7.9}$$

запишем окончательную формулу, выражающую поверхностный интеграл 2-го типа через двойной интеграл:

$$\iint\limits_{\mathcal{S}} \left(\vec{A}\cdot\vec{n}\right)\,dS = \iint\limits_{\Omega} \left(\vec{A}\,, \vec{r}_u\,, \vec{r}_v\right)\,du\,dv\,. \tag{7.10}$$

Сюда вошло так называемое *смешанное произведение*, равное скалярному произведению 1-го вектора с векторным произведением двух оставшихся векторов:

$$(\vec{a}\,, \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{a}\cdot[\vec{b}\times\vec{c}])\,.$$

Напомним геометрический смысл смешанного произведения: Его модуль равен объему параллелепипеда, построенного на указанных трех векторах. При этом смешанное произведение положительно, если входящие в него векторы образуют правую тройку.

Общее соотношение (10) служит достаточно эффективным инструментом вычисления поверхностных интегралов 2-го типа. Однако оно обладает существенным недостатком, характерным для большинства общих формул — отображение поверхности $\mathcal{S}$ на некую абстрактную плоскость параметров $\{u, v\}$ лишает формулу (10) геометрической наглядности. Гораздо более наглядные и простые в обращении формулы возникают, если поверхность удается спроектировать на координатные плоскости. Продемонстрируем сказанное на примере поверхностного интеграла от векторного поля, ориентированного вдоль оси z:

$$\vec{R} = \vec{k}\, R(x, y, z)\,, \tag{7.11}$$

по поверхности, заданной в явной форме $z = z(x, y)$.

Заметим прежде всего, что в данном случае уместно называть разные стороны поверхности — верхней и нижней сторонами. Верхней стороной $\mathcal{S}^+$ назовем ту, вектор нормали к которой образует с осью z острый угол γ. Соответственно, косинус этого угла больше нуля. Напротив, для нижней стороны $\mathcal{S}^-$: $\cos\gamma < 0$. Выбрав в качестве параметров $\{u, v\}$ координаты $\{x, y\}$ точек плоскости $z = 0$ и записав векторное уравнение поверхности в виде:

$$\vec{r} = \vec{i}\, x + \vec{j}\, y + \vec{k}\, z(x, y)\,, \tag{7.12}$$

после несложных выкладок придем к следующим выражениям для направляющих косинусов нормали

$$\begin{gathered} \cos\alpha_{\pm} = \frac{\mp z_x}{\sqrt{1 + z_x^2 + x_y^2}}\,, \quad \cos\beta_{\pm} = \frac{\mp z_y}{\sqrt{1 + z_x^2 + x_y^2}}\,, \\ \cos\gamma_{\pm} = \frac{\pm 1}{\sqrt{1 + z_x^2 + x_y^2}}\,. \end{gathered} \tag{7.13}$$

Здесь знак плюс в левых частях равенств соответствует верхней, а минус –нижней стороне поверхности. Кроме того напомним знакомое по поверхностным интегралам 1-го типа соотношение

$$dS = \sqrt{1 + z_x^2 + x_y^2}\, dxdy = \frac{dxdy}{|\cos\gamma|}\,. \tag{7.14}$$

Пусть заданная поверхность $\mathcal{S}$ взаимно-однозначно проектируется на область σ плоскости $z = 0$. Тогда, согласно (11), (14),

$$\iint\limits_{\mathcal{S}} (\vec{R} \cdot \vec{n}\,) dS = \iint\limits_{\mathcal{S}} R\cos\gamma\, dS = \iint\limits_{\sigma} R\frac{\cos\gamma}{|\cos\gamma|} dxdy$$

или окончательно

$$\iint\limits_{\mathcal{S}^{\pm}} (\vec{R} \cdot \vec{n}\,) dS = \pm \iint\limits_{\sigma} R(x, y, z(x, y))\, dxdy\,. \tag{7.15}$$

Иногда интегрируемая поверхность может быть разбита на несколько кусков, каждый из которых, с помощью своего уравнения $z = z_m(x, y)$, взаимно-однозначно проектируется на некоторую область σ_m плоскости $z = 0$. Тогда имеет место формула

$$\iint\limits_{\mathcal{S}} (\vec{R} \cdot \vec{n}\,) dS = \sum_m \delta_m \iint\limits_{\sigma_m} R(x, y, z_m(x, y))\, dxdy\,, \tag{7.16}$$

где суммирование производится по всем упомянутым кускам поверхности $\mathcal{S}$, а δ_m равно 1, если интегрирование ведется по верхней стороне m-го куска, и -1, если по нижней его стороне. Аналогичные соотношения справедливы и для поверхностных интегралов 2-го типа по другим, составляющим векторное поле $\vec{A}$ (4), компонентам $\vec{P} = \vec{i}\,P$, $\vec{Q} = \vec{j}\,Q$.

В заключение дадим еще одну рабочую формулу, справедливую при явном задании $z = z(x, y)$ поверхности $\mathcal{S}$, взаимно-однозначно проектирующейся на область σ плоскости (x, y). Подставив (13), (14) в (3), будем иметь

$$\iint\limits_{\mathcal{S}^{\pm}} \left(\vec{A} \cdot \vec{n}\right) dS = \mp \iint\limits_{\sigma} (P\, z_x + Q\, z_y - R)\; dxdy\,. \tag{7.17}$$

7.2 Задачи в классе

Задача 7.1

(4364) Вычислить поверхностный интеграл 2-го типа

$$I = \iint\limits_{\mathcal{S}} (y - z)\, dy\, dz + (z - x)\, dz\, dx + (x - y)\, dx\, dy\,,$$

где $\mathcal{S}$ –внешняя сторона конической поверхности

$$x^2 + y^2 = z^2 \qquad (0 \le z \le h)\,.$$

Сосчитать интеграл двумя способами: в цилиндрических координатах и при явном задании поверхности.

Решение 7.1 Чтобы максимально использовать симметрию поверхности, перейдем в цилиндрическую систему координат:

$$\begin{cases} x = \rho \cos\varphi \\ y = \rho \sin\varphi \\ z = \rho \end{cases} \quad \begin{pmatrix} 0 \le \varphi \le 2\pi \\ 0 \le \rho \le h \end{pmatrix}.$$

Тогда векторные уравнения поверхности и подынтегрального векторного поля принимают вид:

$$\vec{r} = \vec{i}\,\rho \cos\varphi + \vec{j}\,\rho \sin\varphi + \vec{k}\,\rho\,,$$

$$\vec{A} = \vec{i}\,(y - z) + \vec{j}\,(z - x) + \vec{k}\,(x - y) =$$

$$= \vec{i}\,\rho(\sin\varphi - 1) + \vec{j}\,\rho(1 - \cos\varphi) + \vec{k}\,\rho(\cos\varphi - \sin\varphi)\,.$$

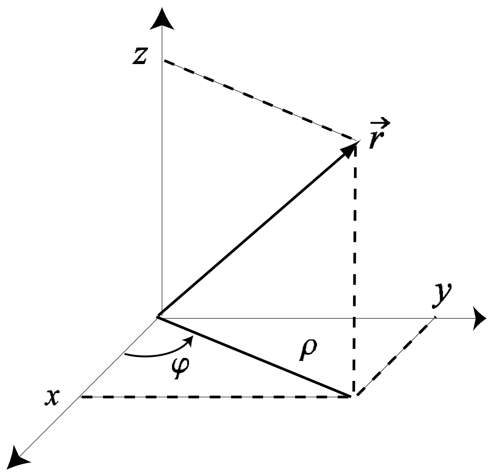

Рис. 7.3: Цилиндрическая система координат. Чтобы получить цилиндрические координаты некоторого радиус-вектора, надо спроектировать его на плоскость (x, y). Полярные координаты проекции дают пару цилиндрических координат ρ и φ. Третьей координатой служит координата z декартовой системы координат, на основе которой построена цилиндрическая система координат.

Заметим еще, что векторы $\vec{r}_\varphi, \vec{r}_\rho$ и вектор нормали $\vec{n}$ к внешней стороне конической поверхности образуют правую тройку векторов. Поэтому входящее в двойной интеграл (10) смешанное произведение равно:

$$\left(\vec{A}, \vec{r}_\varphi, \vec{r}_\rho\right) = \begin{vmatrix} \rho(\sin\varphi - 1) & \rho(1-\cos\varphi) & \rho(\cos\varphi - \sin\varphi) \\ -\rho\sin\varphi & \rho\cos\varphi & 0 \\ \cos\varphi & \sin\varphi & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \rho^2 \left(\cos\varphi\sin\varphi - \cos\varphi - \sin^2\varphi\cos\varphi + \sin^3\varphi - \cos^3\varphi + \right.$$

$$\left. \cos^2\varphi\sin\varphi + \sin\varphi - \cos\varphi\sin\varphi\right) =$$

$$\rho^2\left(\sin\varphi - \cos\varphi - \cos\varphi + \sin\varphi\right) = 2\rho^2\left(\sin\varphi - \cos\varphi\right) \,.$$

Таким образом, данный поверхностный интеграл 2-го типа сводится к следующему двойному интегралу:

$$I = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^h \left(\vec{A}, \vec{r}_\varphi, \vec{r}_\rho\right) d\rho = \int_0^{2\pi} \left(\sin\varphi - \cos\varphi\right) d\varphi \int_0^h \rho^2\, d\rho = 0\,.$$

Мы учли, что двойной интеграл распался на произведение обычных определенных интегралов, один из которых — по φ — равен нулю.

Вычислим теперь указанный интеграл, используя явное задание поверхности:

$$z = \sqrt{x^2+y^2}\,, \quad \left\{(x,y) : \sigma \iff x^2+y^2 \le h^2\right\} \,.$$

Воспользовавшись формулой (17) и имея ввиду, что интегрирование ведется по нижней стороне поверхности, получим

$$I = \iint\limits_{\sigma} (P\, z_x + Q\, z_y - R)\, dxdy\,.$$

Запишем подынтегральное выражение в явном виде, подставив в него

$$P = (y - z)\,, \quad Q = (z - x)\,, \quad R = (x - y)\,,$$
$$z_x = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{x}{z}\,, \quad z_y = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{y}{z}\,.$$

После несложных выкладок имеем:

$$(P\, z_x + Q\, z_y - R) = (y - z)\frac{x}{z} + (z - x)\frac{y}{z} - x + y =$$
$$\frac{1}{z}\,(yx - zx + zy - xy - xz + yz) = \frac{2}{z}(yz - xz) = 2(y - x)\,.$$

В итоге, искомый двойной интеграл приобретает вид:

$$I = 2\iint\limits_{\sigma} (y - x)\, dx\, dy\,. \tag{$*$}$$

Перейдем в нем к полярной системе координат:

$$I = 2\int_0^h \rho^2\, d\rho \int_0^{2\pi} (\sin\varphi - \cos\varphi)\; d\varphi = 0\,.$$

Замечание 7.1 Мы могли бы опустить последние выкладки, сопоставив в интеграле $(*)$ симметрию области интегрирования с симметрией подынтегрального выражения, и сразу придя к выводу, что $I = 0$. Обладая физическим складом ума, можно было бы сообразить, что интеграл $(*)$ пропорционален разности x и y координат момента массы горизонтально расположенного однородного круга с центром в начале координат, и снова прийти к уже упомянутому выводу.

Задача 7.2
(4365) Вычислить интеграл

$$I = \iint\limits_{\mathcal{S}} \left(\frac{dy\, dz}{x} + \frac{dz\, dx}{y} + \frac{dx\, dy}{z} \right)\,,$$

где $\mathcal{S}$ –внешняя сторона эллипсоида

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1\,.$$

Решение 7.2 Представим уравнение эллипсоида в следующей параметрической форме:

$$\begin{cases} x = a\sin\theta\cos\varphi \\ y = b\sin\theta\sin\varphi \\ z = c\cos\theta \end{cases} \qquad \left(\begin{array}{c} 0 \le \varphi \le 2\pi \\ 0 \le \theta \le \pi \end{array} \right)\,.$$

При этом подынтегральное векторное поле и векторное уравнение поверхности примут вид:

$$\vec{A} = \frac{\vec{i}}{a\sin\theta\cos\varphi} + \frac{\vec{j}}{b\sin\theta\sin\varphi} + \frac{\vec{k}}{c\cos\theta}\,,$$

$$\vec{r} = \vec{i}\,a\sin\theta\cos\varphi + \vec{j}\,b\sin\theta\sin\varphi + \vec{k}\,c\cos\theta\,,$$

векторы $\vec{r}_\theta$ и $\vec{r}_\varphi$ образуют правую тройку с внешней нормалью, а смешанное произведение в правой части формулы (10) окажется равным:

$$\left(\vec{A}\,,\vec{r}_\theta\,,\vec{r}_\varphi\right) = \begin{vmatrix} \dfrac{1}{a\sin\theta\cos\varphi} & \dfrac{1}{b\sin\theta\sin\varphi} & \dfrac{1}{c\cos\theta} \\ a\cos\theta\cos\varphi & b\cos\theta\sin\varphi & -c\sin\theta \\ -a\sin\theta\sin\varphi & b\sin\theta\cos\varphi & 0 \end{vmatrix} =$$

$$\frac{bc}{a}\sin\theta + \frac{ac}{b}\sin\theta + \frac{ab}{c}\sin\theta\sin^2\varphi + \frac{ab}{c}\sin\theta\cos^2\varphi$$

или, после несложных преобразований,

$$\left(\vec{A},\vec{r}_\varphi,\vec{r}_\theta\right) = \left(\frac{ab}{c} + \frac{ac}{b} + \frac{bc}{a}\right)\sin\theta\,.$$

Подставив это выражение в двойной интеграл, получим окончательно:

$$I = \left(\frac{ab}{c} + \frac{ac}{b} + \frac{bc}{a}\right)\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi}\sin\theta\,d\theta = 4\pi\left(\frac{ab}{c} + \frac{ac}{b} + \frac{bc}{a}\right)\,.$$

Замечание 7.1 Приведенное решение задачи оставляет чувство неудовлетворенности по крайней мере по двум причинам: Во-первых, выбранный метод решения чересчур формален и не способствует осмыслению геометрической сути результата. Кроме того, довольно сложные промежуточные выкладки не гарантируют правильный ответ. В его пользу пожалуй свидетельствует лишь гармония окончательного выражения. Поэтому имеет смысл проверить результат, решив задачу другим способом.

Прежде всего разобьем интеграл на 3 части и попытаемся вначале вычислить последнее слагаемое

$$I_z = \iint\limits_{S} \frac{dxdy}{z}$$

при явном задании поверхности

$$z = \pm c\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}\,.$$

Очевидно, вклады от нижней и верхней половинок эллипсоида в исследуемый интеграл одинаковы, а значит I_z равно удвоенному интегралу по верхней половинке эллипсоида. Заметив еще, что, согласно (15), этот поверхностный интеграл равен двойному интегралу по плоской области σ –внутренности эллипса

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\,,$$

лежащего в плоскости $z = 0$, будем иметь:

$$I_z = \frac{2}{c} \iint\limits_{\sigma} \frac{dxdy}{\sqrt{1 - \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2}}} \,.$$

Для удобства дальнейших выкладок перемасштабируем оси координат в плоскости $\{x, y\}$ так, чтобы область интегрирования превратилась в круг единичного радиуса. Иными словами, сделаем в двойном интеграле замену переменных

$$u = \frac{x}{a}\,, \quad v = \frac{y}{b}\,.$$

В итоге интеграл примет вид:

$$I_z = 2\frac{ab}{c} \iint\limits_{\Sigma} \frac{dudv}{\sqrt{1 - u^2 - v^2}}\,,$$

где Σ –круг $u^2 + v^2 \leq 1$. Перейдя к интегрированию по полярным координатам:

$$u = r\cos\varphi\,, \quad v = r\sin\varphi\,, \quad dxdy = rdrd\varphi\,,$$

найдем, что

$$I_z = 2\frac{ab}{c} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \frac{r\,dr}{\sqrt{1 - r^2}} = 4\pi\frac{ab}{c}\,. \qquad (**)$$

Замечание 7.2 Геометрический смысл данного результата достаточно прозрачен: Чем меньше c, тем ближе поверхность эллипсоида к плоскости $z = 0$, где интегрируемая функция $1/z$ имеет бесконечную особенность, и следовательно тем больше оказывается значение поверхностного интеграла. Напротив, с уменьшением a и b, "съеживается" эллипс в плоскости $z = 0$, а вместе с ним уменьшается и поток векторного поля $\vec{k}/z$ через заданную поверхность.

Из соображений симметрии ясно, что вклады остальных слагаемых I_y и I_x в искомый интеграл I могут быть получены круговой перестановкой a, b и c в правой части $(**)$. Следовательно, приходим к уже знакомому ответу

$$I = 4\pi\left(\frac{ab}{c} + \frac{ac}{b} + \frac{bc}{a}\right)\,.$$

Задача 7.3
(4366) Вычислить интеграл

$$I = \iint\limits_{\mathcal{S}} x^2\,dydz + y^2\,dzdx + z^2\,dxdy\,,$$

где $\mathcal{S}$ –внешняя сторона сферы

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2\,.$$

Решение 7.3 Интуиция и опыт решения предыдущей задачи подсказывают, что вклады в интеграл от каждого подынтегрального слагаемого должны быть в чем-то схожи. Поэтому, пытаясь избежать чересчур громоздких выкладок, вычислим вначале интеграл от первого слагаемого, представив его в форме "полноценного" поверхностного интеграла 2-го типа:

$$I_x = \iint\limits_{S} x^2\, dydz = \iint\limits_{S} \left(\vec{P}\cdot\vec{n}\right)\, dS\,.$$

Здесь введено вспомогательное, ориентированное вдоль оси x, векторное поле

$$\vec{P} = \vec{i}\,x^2 + \vec{j}\,0 + \vec{k}\,0\,.$$

Намереваясь свести искомый поверхностный интеграл к двойному, по прямоугольнику ($0 \le \varphi \le 2\pi,\ 0 \le \theta \le \pi$) в плоскости ($\varphi$, θ), запишем уравнение сферы в виде:

$$\left\{\begin{array}{l} x = a + R\sin\theta\cos\varphi \\ y = b + R\sin\theta\sin\varphi \\ z = c + R\cos\theta \end{array}\right. \qquad \left(\begin{array}{c} 0 \le \theta \le \pi \\ 0 \le \varphi \le 2\pi \end{array}\right).$$

При таком выборе параметров векторное уравнение поверхности и интегрируемое векторное поле примут вид:

$$\vec{r} = \vec{i}\,(a + R\sin\theta\cos\varphi) + \vec{j}\,(b + R\sin\theta\sin\varphi) + \vec{k}\,(c + R\cos\theta)\,,$$
$$\vec{P} = \vec{i}\,(a + R\sin\theta\cos\varphi)^2\,.$$

Заметим еще, что правую тройку с нормалью $\vec{n}$ к внешней стороне сферы образуют векторы $\vec{r}_\theta$ и $\vec{r}_\varphi$.

Сосчитаем требуемое векторное произведение:

$$\left(\vec{P}\,,\vec{r}_\theta\,,\vec{r}_\varphi\right) = \left|\begin{array}{ccc} (a + R\sin\theta\cos\varphi)^2 & 0 & 0 \\ R\cos\theta\cos\varphi & R\cos\theta\sin\varphi & -R\sin\theta \\ -R\sin\theta\sin\varphi & R\sin\theta\cos\varphi & 0 \end{array}\right| =$$
$$R^2\,(a + R\sin\theta\cos\varphi)^2\sin^2\theta\cos\varphi =$$
$$R^2\,a^2\sin^2\theta\cos\varphi + 2aR^3\sin^3\theta\cos^2\varphi + R^4\sin^4\theta\cos^3\varphi\,.$$

Сообразив, что интегралы от нечетных степеней $\cos\varphi$ по периоду 2π равны нулю, обнаружим, что ненулевой вклад в интеграл дает лишь второе слагаемое в правой части:

$$I_1 = 2aR^3 \int_0^{2\pi} \cos^2\varphi\, d\varphi \int_0^{\pi} \sin^3\theta\, d\theta\,.$$

Причем интеграл по φ равен π, а интеграл по θ вычисляется элементарно:

$$\int_0^{\pi} \sin^3\theta\, d\theta = -\int_0^{\pi} (1 - \cos^2\theta)\, d\cos\theta =$$

$$= \int_{-1}^{1} (1 - u^2)\, du = 2\left(1 - \frac{1}{3}\right) = \frac{4}{3}\,.$$

Таким образом:

$$I_x = \frac{8}{3}\pi R^3 a\,.$$

Отсюда видно, что интуиция нас не подвела, и по форме ответа нетрудно выяснить, чему равны интегралы от оставшихся двух слагаемых исходного интеграла. Надо лишь заменить в полученной формуле a поочередно на b и c и записать окончательно:

$$I = \frac{8}{3}\pi R^3(a+b+c)\,.$$

Замечание 7.1 Хотя мы полностью уверены в правильности ответа, не будет лишним проверить его, вычислив интеграл другим способом. Как и прежде, разобьем интеграл на три части, но теперь подробно изучим последнее слагаемое

$$I_z = \iint\limits_{\mathcal{S}} z^2 dxdy\,.$$

Представим интегрируемую поверхность в виде двух половинок $\mathcal{S}^+$ и $\mathcal{S}^-$, каждая из которых задана своим явным уравнением

$$\mathcal{S}^+:\ z = c + \sqrt{R^2-(x-a)^2-(y-b)^2}\,,$$
$$\mathcal{S}^-:\ z = c - \sqrt{R^2-(x-a)^2-(y-b)^2}\,.$$

Проектируя каждую из половинок сферы на круг

$$\sigma:\ (x-a)^2+(y-b)^2 \le R^2$$

в плоскости $z=0$, и учитывая, что интегрирование ведется по верхней стороне верхней половинки и по нижней стороне нижней половинки, в соответствии с равенством (16) будем иметь:

$$I_z = \iint\limits_{\sigma} \left[\left(c+\sqrt{\ldots}\right)^2 - \left(c-\sqrt{\ldots}\right)^2\right] dxdy =$$
$$4c\iint\limits_{\sigma} \sqrt{R^2-(x-a)^2-(y-b)^2}\,dxdy\,.$$

Последующий переход к полярной системе координат

$$x = a+\rho\cos\varphi\,,\quad y = b+\rho\sin\varphi\,,\quad dxdy = \rho d\rho d\varphi\,,$$

дает:

$$J_z = 4c\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R \sqrt{R^2-\rho^2}\,\rho\,d\rho = \frac{8}{3}\pi c R^3\,.$$

Аналогично

$$I_y = \frac{8}{3}\pi b R^3\,,$$

и мы приходим к прежнему результату:

$$I = I_x + I_y + I_z = \frac{8}{3}\pi\, R^3(a+b+c)\,.$$

7.3 Домашнее задание

4363

Задача 7.4
(4363) Вычислить поверхностный интеграл 2-го типа:

$$I = \iint\limits_{\mathcal{S}} f(x)\, dydz + g(y)\, dzdx + h(z)\, dxdy\,,$$

где $f(x)$, $g(y)$, $h(z)$ –непрерывные функции и $\mathcal{S}$ –внешняя сторона поверхности параллелепипеда $0 \le x \le a$, $0 \le y \le b$, $0 \le z \le c$.

Решение 7.4 При вычислении данного интеграла его полезно разбить на 3 слагаемых и обсуждать каждое по отдельности. Начнем с третьего слагаемого:

$$I_3 = \iint\limits_{\mathcal{S}} h(z)\, dxdy = \iint\limits_{\mathcal{S}} h(z) \cos\gamma\, dS\,.$$

Вклад в этот интеграл дают лишь верхняя и нижняя стороны параллелепипеда, для которых $\cos\gamma$ не равен нулю. Имея в виду, что на этих сторонах подынтегральная функция постоянна, выносится из под знака интеграла, а оставшиеся интегралы равны площади сторон, имеем:

$$I_3 = [h(c) - h(0)]\ ab\,.$$

Знак минус здесь учитывает тот факт, что вектор нормали к нижней стороне параллелепипеда направлен в сторону, противоположную направлению оси z.

Расчеты остальных составляющих исходного интеграла совершенно аналогичны, и в совокупности приводят к окончательному результату:

$$I = \frac{1}{abc}\left(\frac{f(a) - f(0)}{a} + \frac{g(b) - g(0)}{b} + \frac{h(c) - h(0)}{c}\right)\,.$$

Задача 7.5
Вычислить следующий поверхностный интеграл 2-го типа

$$\iint\limits_{\mathcal{S}} y^2 z\, dxdy + xz\, dydz + x^2 y\, dzdx\,,$$

где $\mathcal{S}$ –внешняя сторона замкнутой поверхности, расположенной в первом октанте и составленной из параболоида вращения $z = x^2 + y^2$, цилиндра $x^2 + y^2 = 1$ и координатных плоскостей $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.

Решение 7.5 Разобьем интегрируемую поверхность на пять участков, по числу ограничивающих его гладких кусков: $I = I_p + I_c + I_x + I_y + I_z$. Здесь I_p –вклад куска параболоида, I_c –куска цилиндра, I_x –плоскости $x = 0$, I_y –плоскости $y = 0$ и I_z –плоскости $z = 0$. Начнем с вычисления интегралов по плоским участкам. В первом из них остается лишь одно слагаемое

$$I_x = \iint\limits_{\sigma_x} xz\, dydz\,,$$

поскольку в плоскости $x = 0$ справедливы тождества: $dxdy = dzdx \equiv 0$. Кроме того и выражение под оставшимся интегралом равно нулю во всех точках указанной плоскости. А значит $I_x = 0$. По сходным причинам имеем: $I_y = I_z = 0$.

Приступим к вычислению интеграла I_p по куску поверхности параболоида. Спроектировав его на плоскость (x, y), находим:

$$I_p = \iint\limits_{\sigma_z} (\vec{A}, \vec{r}_x, \vec{r}_y)\, dxdy\,.$$

Здесь за σ_z обозначена четверть круга в плоскости $z = 0$, по которому ведется интегрирование в двойном интеграле. Вычислим фигурирующее в нем смешанное произведение. Для этого выпишем вначале векторное поле и уравнение поверхности:

$$\vec{A} = \vec{i}\, x(x^2 + y^2) + \vec{j}\, x^2 y + \vec{k}\, y^2(x^2 + y^2)\,,$$
$$\vec{r} = \vec{i}x + \vec{j}y + \vec{k}(x^2 + y^2)\,.$$

Отсюда

$$(\vec{A}, \vec{r}_x, \vec{r}_y) = \begin{vmatrix} x(x^2 + y^2) & x^2 y & y^2(x^2 + y^2) \\ 1 & 0 & 2x \\ 0 & 1 & 2y \end{vmatrix} = -2x^4 + y^4 - 3x^2y^2\,.$$

Таким образом, исследуемый интеграл принимает вид:

$$I_p = -\iint\limits_{\sigma_z} (x^4 + 3x^2y^2) dxdy\,.$$

Здесь мы сразу приняли во внимание симметрию области σ_z, согласно которой слагаемые x^4 и y^4 вносят одинаковый вклад. Выбрав за переменные интегрирования полярные координаты, сведем двойной интеграл к произведению определенных интегралов:

$$I_p = -\int_0^{\pi/2} (\cos^4\varphi + 3\sin^2\varphi\cos^2\varphi)\, d\varphi \int_0^1 \rho^5 d\rho\,.$$

Сосчитав интеграл по ρ и используя стандартные тригонометрические преобразования

$$\cos^2\varphi = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\varphi)\,, \quad \sin\varphi\,\cos\varphi = \frac{1}{2}\sin 2\varphi\,,$$

будем иметь:

$$I_p = -\frac{1}{24}\int_0^{\pi/2} \left[(1 + \cos 2\varphi)^2 + 3\sin^2 2\varphi\right] d\varphi\,.$$

Далее сами собой напрашиваются аналогичные тригонометрические преобразования подынтегрального выражения:

$$(1 + \cos 2\varphi)^2 + 3\sin^2 2\varphi = 1 + 2\cos 2\varphi + \cos^2 2\varphi + 3\sin^2 2\varphi =$$
$$2 + 2\cos 2\varphi + 2\sin^2 2\varphi = 3 + 2\cos 2\varphi - \cos 4\varphi\,.$$

Очевидно, что интегралы от входящих сюда косинусов в указанных пределах от 0 до $\pi/2$ равны нулю, а значит

$$I_p = -\frac{1}{24}\int_0^{\pi/2} 3d\varphi = -\frac{\pi}{16}\,.$$

Осталось вычислить интеграл по куску цилиндрической поверхности, где в качестве параметров удобно взять цилиндрические координаты φ и z. При этом интегрируемое поле и радиус-вектор поверхности запишутся в виде:

$$\vec{A} = \vec{i}\,z\cos\varphi + \vec{j}\,\cos^2\varphi\,\sin\varphi + \vec{k}\,z\sin^2\varphi\,,$$
$$\vec{r} = \vec{i}\,\cos\varphi + \vec{j}\,\sin\varphi + \vec{j}\,z\,,$$

а поверхностный интеграл сведется к двойному

$$I_c = \int_0^1 dz\int_0^{\pi/2} d\varphi\,(\vec{A},\vec{r}_\varphi,\vec{r}_z)\,.$$

Здесь

$$(\vec{A},\vec{r}_\varphi,\vec{r}_z) = \begin{vmatrix} z\cos\varphi & \cos^2\varphi\,\sin\varphi & z\sin^2\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = z\cos^2\varphi + \frac{1}{4}\sin^2 2\varphi\,.$$

Следовательно

$$I_c = \int_0^1 dz\int_0^{\pi/2} d\varphi\left(z\cos^2\varphi + \frac{1}{4}\sin^2 2\varphi\right) = \frac{3\pi}{16}\,.$$

Таком образом окончательно

$$I = I_p + I_c = -\frac{\pi}{16} + \frac{3\pi}{16} = \frac{\pi}{8}\,.$$