

Глава 8

Вычисление объемов тел с помощью поверхностного интеграла

8.1 Необходимые сведения из теории

До сих пор мы учились вычислять непосредственно поверхностные интегралы. Во многих приложениях однако оказывается полезной знаменитая *формула Гаусса-Остроградского*, выражающая поверхностные интегралы 2-го типа через объемные. Она предоставляет в наше распоряжение гибкий инструмент анализа, позволяющий формулировать проблемы поверхностных интегралов на языке интегралов объемных и наоборот.

Напомним формулу Гаусса-Остроградского. Для этого возьмем некоторое векторное поле, заданное в декартовой системе координат:

$$\vec{A}(\vec{r}) = \vec{i}P(x, y, z) + \vec{j}Q(x, y, z) + \vec{k}R(x, y, z).$$

Согласно формуле Гаусса-Остроградского, поверхностный интеграл 2-го типа по замкнутой поверхности \mathcal{S} , ограничивающей некоторую область \mathcal{V} , следующим образом выражается через объемный интеграл по этой области:

$$I = \iint_{\mathcal{S}} (\vec{A} \cdot \vec{n}) dS = \iiint_{\mathcal{V}} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx dy dz. \quad (8.1)$$

Здесь \vec{n} – внешний вектор нормали к поверхности \mathcal{S} . Взяв в качестве векторного поля \vec{A} радиус-вектор произвольной точки трехмерного пространства:

$$\vec{r} = \vec{i}x + \vec{j}y + \vec{k}z,$$

придем к соотношению

$$V = \frac{1}{3} \iint_{\mathcal{S}} (\vec{r} \cdot \vec{n}) dS, \quad (8.2)$$

выражающему объем рассматриваемой области через поверхностный интеграл по ее границе. На этом занятии мы будем пользоваться данным частным следствием формулы Гаусса-Остроградского для вычисления объемов разных тел.

8.2 Задачи в классе

Задача 8.1

Вычислить объем тела, ограниченного эллипсоидом

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Решение 8.1 Для нахождения требуемого объема воспользуемся формулой (2), предварительно задав радиус-вектор точек эллипсоида в уже знакомой по предыдущим занятиям параметрической форме:

$$\vec{r} = \vec{i} a \sin \theta \cos \varphi + \vec{j} b \sin \theta \sin \varphi + \vec{k} c \cos \theta \\ (0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad 0 \leq \theta \leq \pi).$$

Заметив далее, что векторы $(\vec{r}_\theta, \vec{r}_\varphi, \vec{n})$ образуют правую тройку и перейдя от поверхностного интеграла к двойному по прямоугольной области в плоскости параметров φ, θ , перепишем соотношение (2) в виде:

$$V = \frac{1}{3} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi (\vec{r}, \vec{r}_\theta, \vec{r}_\varphi) d\theta.$$

Вычислим входящее сюда смешанное произведение:

$$(\vec{r}, \vec{r}_\theta, \vec{r}_\varphi) = abc \begin{vmatrix} \sin \theta \cos \varphi & \sin \theta \sin \varphi & \cos \theta \\ \cos \theta \cos \varphi & \cos \theta \sin \varphi & -\sin \theta \\ -\sin \theta \sin \varphi & \sin \theta \cos \varphi & 0 \end{vmatrix} = \\ = abc \sin \theta (\sin^2 \theta \cos^2 \varphi + \sin^2 \theta \sin^2 \varphi + \cos^2 \theta \sin^2 \varphi + \cos^2 \theta \cos^2 \varphi) = \\ = abc \sin \theta.$$

Таким образом, искомый объем оказывается равным:

$$V = \frac{1}{3} abc \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin \theta d\theta = \frac{4}{3} \pi abc.$$

В частности, при $a = b = c$ получаем отсюда известную со школы формулу объема шара.

Задача 8.2

(4383) Доказать, что объем конуса, ограниченного гладкой конической поверхностью $F(x, y, z) = 0$ и плоскостью $Ax + By + Cz + D = 0$, равен:

$$V = \frac{1}{3} SH,$$

где S — площадь основания конуса, расположенного в данной плоскости, и H — его высота.

РЕШЕНИЕ 8.2 Как всегда начнем с уяснения геометрического смысла поставленной задачи. Напомним — конической называют поверхность, построенную следующим образом: Возьмем некоторую фиксированную точку \vec{O} — вершину конической поверхности, и произвольный контур \mathcal{L} . Коническую поверхность образует совокупность образующих — лучей, испущенных из вершины \vec{O} , и проходящих через точки контура \mathcal{L} . В нашем случае контур \mathcal{L} лежит в плоскости, указанной в условии задачи, а вершина отстоит от нее на расстоянии H .

Не имея представления, как решать задачу в общем случае, обсудим вначале частную ситуацию, когда вершина конуса расположена в начале координат. Разобьем поверхностный интеграл в правой части формулы (2) на две части — на интеграл по поверхности конуса — обозначим ее \mathcal{S}_c , и на интеграл по его плоскому основанию — \mathcal{S}_p . Заметим, что для любой точки выбранной конической поверхности, ее радиус-вектор и нормаль к поверхности перпендикулярны. Поэтому интеграл по конической поверхности равен нулю. Чтобы вычислить интеграл по плоскому основанию конической поверхности, заметим, что во всех его точках скалярное произведение $(\vec{r} \cdot \vec{n})$ принимает одно и то же значение, равное кратчайшему расстоянию между плоскостью основания и началом координат, то есть высоте нашего конуса:

$$(\vec{r} \cdot \vec{n}) = H.$$

Таким образом, согласно сказанному, формула (2) превращается в обсуждаемом случае в:

$$V = \frac{1}{3} \iint_{\mathcal{S}_p} (\vec{r} \cdot \vec{n}) dS = \frac{1}{3} H \iint_{\mathcal{S}_p} dS = \frac{1}{3} HS,$$

что и требовалось доказать.

Перейдем теперь к искомому общему случаю, когда вершина конуса расположена не в начале координат, а в произвольной точке с радиус-вектором \vec{a} . Чтобы воспользоваться плодами решения предыдущей частной проблемы, представим радиус-вектор точек конуса в виде суммы:

$$\vec{r} = \vec{a} + \vec{\rho},$$

где $\vec{\rho}$ — вектор, испущенный из вершины конуса. При этом поверхностный интеграл (2), выражающий объем рассматриваемой нами области, распадется на два интеграла:

$$V = \frac{1}{3} \iint_{\mathcal{S}} (\vec{a} \cdot \vec{n}) dS + \frac{1}{3} \iint_{\mathcal{S}} (\vec{\rho} \cdot \vec{n}) dS.$$

Второй из этих интегралов мы только-что вычислили. Он равен $SH/3$. Первый же интеграл равен нулю. Чтобы убедиться что так оно и есть, достаточно преобразовать указанный поверхностный интеграл в объемный с помощью формулы Гаусса-Остроградского (1). Поскольку частные производные компонент постоянного вектора \vec{a} тождественно равны нулю, то равен нулю объемный интеграл, а вместе с ним и поверхностный интеграл:

$$\iint_{\mathcal{S}} (\vec{a} \cdot \vec{n}) dS \equiv 0. \quad (*)$$

Следовательно, и в общем случае справедлива доказываемая нами формула.

ЗАМЕЧАНИЕ 8.1 Отметим наглядный физический смысл тождества (*). Оно означает, что поток постоянного векторного поля через любую замкнутую поверхность равен нулю — сколько в нее “втекает”, столько и “вытекает”.

ЗАМЕЧАНИЕ 8.2 Ясное понимание геометрического смысла поставленной задачи помогло бы нам опустить последние выкладки. Действительно, объем конуса не зависит от расположения в пространстве, а лишь от его формы. Поэтому помещение вершины конуса в начало координат не ограничивает общности ответа. Кстати, при таком геометрическом подходе мы получили бы тождество (*) не как следствие теоремы Гаусса-Остроградского, а как побочный результат геометрических рассуждений.

ЗАДАЧА 8.3

(4384) Найти объем тела, ограниченного поверхностями $z = \pm c$ и

$$\begin{cases} x = a \cos u \cos v + b \sin u \sin v, \\ y = a \cos u \sin v - b \sin u \cos v, \\ z = c \sin u. \end{cases} \quad (a > 0, b > 0, c > 0)$$

РЕШЕНИЕ 8.3 Поверхность, ограничивающая область, объем которой нам надо найти, состоит из “крышки” $z = c$, “дна” $z = -c$, и боковой поверхности, заданной достаточно замысловатыми уравнениями. Чтобы наглядно представить, что из себя представляет боковая поверхность, попробуем исключить углы u и v , надеясь прийти к одному из знакомых канонических уравнений. Для этого возведем в квадрат выражения для x и y , и сложим квадраты. Группируя по отдельности слагаемые, пропорциональные a^2 , b^2 и ab , в итоге получим:

$$x^2 + y^2 = a^2 \cos^2 u + b^2 \sin^2 u.$$

Выразим правую часть последнего равенства через z^2 :

$$x^2 + y^2 = a^2 + (b^2 - a^2) \frac{z^2}{c^2}. \quad (*)$$

Отсюда видно, что боковая поверхность является эллипсоидом вращения (если $a > b$), или гиперboloидом вращения (если $a < b$). Их осью вращения служит ось z . В обоих случаях сечение боковой поверхности плоскостью $z = 0$ представляет собой окружность радиуса a , а сечения плоскостями “дна и крышки” ($z = \pm c$) — окружность радиуса b . Разобьем поверхностный интеграл (2), выражающий объем области, на три части: интегралы по плоским дну и крышкам, и интеграл по боковой поверхности S_l (lateral area). Опираясь на опыт решения предыдущей задачи, сразу сообразим, что вклад дна и крышки равен их площадям, умноженным на расстояние до начала координат. Таким образом, искомый объем выражается следующей формулой:

$$V = \frac{2}{3} \pi b^2 c + W.$$

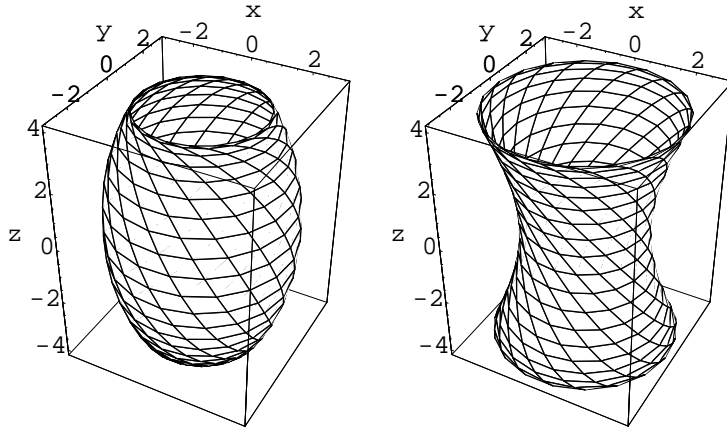


Рис. 8.1: Графики тела из задачи 3 при $c = 4$, $a = 3$, $b = 2$ (слева) и $a = 2$, $b = 3$ (справа). На рисунке хорошо видны круговые координатные линии $u = \text{const}$ и винтообразные координатные линии $v = \text{const}$.

Здесь за W обозначен интеграл по боковой поверхности:

$$W = \frac{1}{3} \iint_{S_l} (\vec{r} \cdot \vec{n}) dS.$$

Преобразуем его к двойному интегралу. Но вначале запишем уравнение боковой поверхности в форме, максимально использующей ее симметрию – как поверхности вращения вокруг вертикальной оси z . А именно, перейдем в цилиндрическую систему координат (ρ, φ, z) . Из (*) вытекает, что уравнение боковой поверхности можно записать в виде: $\rho = R(z)$, где

$$R(z) = \sqrt{a^2 + k z^2}, \quad k = \frac{b^2 - a^2}{c^2}.$$

Ему эквивалентно следующее векторное уравнение боковой поверхности:

$$\vec{r} = \vec{i} R \cos \varphi + \vec{j} R \sin \varphi + \vec{k} z.$$

Еще раз обратим внимание на то, что вместо исходных параметров (u, v) , мы теперь используем геометрически более наглядные параметры (φ, z) . Заметив далее, что векторы $\vec{r}_\varphi, \vec{r}_z, \vec{n}$ образуют правую тройку, перейдем от оставшегося поверхностного интеграла к двойному

$$W = \iint_{\Omega} (\vec{r}, \vec{r}_\varphi, \vec{r}_z) d\varphi dz.$$

Здесь Ω -прямоугольник $\{\varphi \in [0, 2\pi], z \in [-1, 1]\}$ в плоскости (φ, z) , точки которого взаимно-однозначно отображаются на боковую поверхность.

Вычислим входящее в двойной интеграл смешанное произведение:

$$(\vec{r}, \vec{r}_\varphi, \vec{r}_z) = \begin{vmatrix} R \cos \varphi & R \sin \varphi & z \\ -R \sin \varphi & R \cos \varphi & 0 \\ R' \cos \varphi & R' \sin \varphi & 1 \end{vmatrix}.$$

Прежде чем начать считать полученный довольно громоздкий определитель, упростим его, используя свойства симметрии боковой поверхности. Из геометрических соображений ясно, что при фиксированном z и изменении угла φ , величина и взаимное расположение векторов \vec{r} , \vec{r}_φ , \vec{r}_z меняться не будут. Соответственно, не будет зависеть от φ и искомое смешанное произведение. Поэтому, для упрощения вычислений, можно положить в определителе $\varphi = 0$, что дает:

$$(\vec{r}, \vec{r}_\varphi, \vec{r}_z) = \begin{vmatrix} R & 0 & z \\ 0 & R & 0 \\ R' & 0 & 1 \end{vmatrix} = R^2 - zRR' = a^2.$$

Подставив это выражение в двойной интеграл, будем иметь:

$$W = \frac{1}{3}a^2 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-c}^c dz = \frac{4}{3}\pi a^2 c.$$

Следовательно, окончательное выражение для объема таково:

$$V = \frac{2\pi}{3}b^2 c + W = \frac{2\pi}{3}c(b^2 + 2a^2).$$

8.3 Домашнее задание

4385.1

ЗАДАЧА 8.4

(4385.1) Найти объем тела, ограниченного тором:

$$\begin{cases} x = (b + a \cos \psi) \cos \varphi, \\ y = (b + a \cos \psi) \sin \varphi, \\ z = a \sin \psi \end{cases} \quad (0 < a \leq b).$$

РЕШЕНИЕ 8.4 Отметим, что мы получим указанный тор, если будем вращать расположенную в плоскости (x, z) окружность радиуса a , с центром в точке $(x = b, z = 0)$, вокруг оси z . При этом перемещению по окружности соответствует изменение угла ψ , а вращению самой окружности, изменение φ . Нетрудно сообразить также, что все точки тора взаимно однозначно отображаются в квадрат со сторонами $(\varphi \in (0, 2\pi), \psi \in (0, 2\pi))$. Таким образом, объем тора выражается следующим двойным интегралом:

$$V = \frac{1}{3} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{2\pi} d\psi (\vec{r}, \vec{r}_\varphi, \vec{r}_\psi).$$

Здесь принято во внимание, что векторы \vec{n} , \vec{r}_φ и \vec{r}_ψ образуют правую тройку.

Вычислим входящее в двойной интеграл смешанное произведение. Учитывая, что векторное параметрическое уравнение тора имеет вид:

$$\vec{r} = \vec{i}(b + a \cos \psi) \cos \varphi + \vec{j}(b + a \cos \psi) \sin \varphi + \vec{k} a \sin \psi,$$

получим:

$$(\vec{r}, \vec{r}_\varphi, \vec{r}_\psi) = \begin{vmatrix} (b + a \cos \psi) \cos \varphi & (b + a \cos \psi) \sin \varphi & a \sin \psi \\ -(b + a \cos \psi) \sin \varphi & (b + a \cos \psi) \cos \varphi & 0 \\ -a \sin \psi \cos \varphi & -a \sin \psi \sin \varphi & a \cos \psi \end{vmatrix}.$$

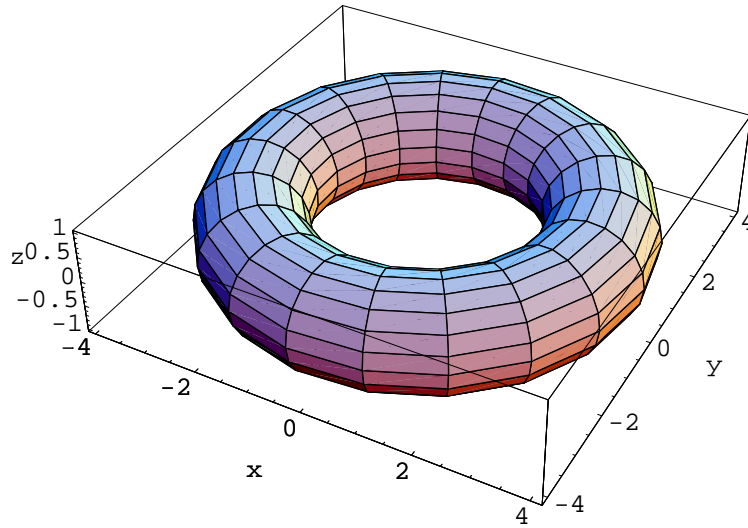


Рис. 8.2: График тора из задачи 4 для случая $a = 1$ и $b = 3$.

По аналогии с последней решенной в классе задачей, воспользуемся симметрией тора для упрощения вычисления смешанного произведения. А именно, примем во внимание, что оно не должно зависеть от угла φ . Положив φ равным нулю, получим:

$$\begin{aligned}
 (\vec{r}, \vec{r}_\varphi, \vec{r}_\psi) &= \begin{vmatrix} b + a \cos \psi & 0 & a \sin \psi \\ 0 & b + a \cos \psi & 0 \\ -a \sin \psi & 0 & a \cos \psi \end{vmatrix} = \\
 &= (b + a \cos \psi)^2 a \cos \psi + (b + a \cos \psi) a^2 \sin^2 \psi = \\
 &= a^2 b (\cos^2 \psi + 1) + a(a^2 + b^2) \cos \psi.
 \end{aligned}$$

Вспомнив далее, что интеграл по полному периоду от $\cos \psi$ равен нулю, найдем окончательно:

$$V = \frac{1}{3} a^2 b \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{2\pi} (1 + \cos^2 \psi) d\psi = 2a^2 b \pi^2.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 8.1 Обратим внимание, что ответ имеет удивительно прозрачный геометрический смысл. Он распадается на произведение площади вращающейся окружности πa^2 , и длины окружности $2\pi b$, вдоль которой происходит вращение.