Глава 9

Основные понятия теории поля

9.1 Необходимые сведения из теории

Данное занятие посвящено знакомству с основными понятиями и дифференциальными операциями теории поля. Как известно, математическая теория поля изучает свойства функций, аргументами которых служат точки 3-х мерного пространства.

Определение 9.1 *Пусть Ω –некоторая область в 3-х мерном пространстве. Будем говорить, что в данной области задано* **скалярное поле**, *если определена однозначная скалярная функция $U(M)$, отображающая все точки $M \in \Omega$ в точки числовой оси $\mathbb{R}$.*

Типичным примером скалярного поля может служить поле температур неравномерно нагретого тела.

Определение 9.2 *Будем говорить, что в области Ω задано* **векторное поле** $\vec{A}(M)$, *если каждой точке M этой области поставлен в однозначное соответствие вектор (свой для каждой точки).*

Характерной иллюстрацией векторного поля являются электрическое и магнитное поле земли, поле скоростей движения воздуха.

Пусть в пространстве задана декартова система координат, ставящая в соответствие каждой точке M ее координаты (x, y, z). Тогда скалярное поле эквивалентно некоторой функции 3-х аргументов $U(x, y, z)$, а векторное поле представимо в виде:

$$\vec{A} = \vec{i}\, P(x, y, z) + \vec{j}\, Q(x, y, z) + \vec{k}\, R(x, y, z)\,. \tag{9.1}$$

Здесь $\{P,\ Q,\ R\}$ –проекции векторного поля на декартовы оси с базисными векторами $\{\vec{i},\ \vec{j},\ \vec{k}\}$. В дальнейшем будем считать, что все перечисленные функции непрерывно дифференцируемы для всех (x, y, z), принадлежащих рассматриваемой области $\Omega \subset \mathbb{R}^3$.

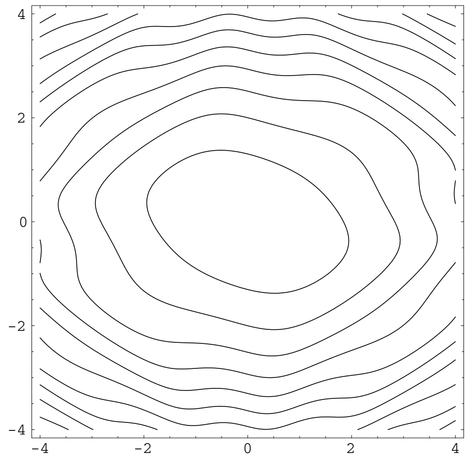

Рис. 9.1: График линий уровня двумерного скалярного поля $U(x, y) = x^2 + 2y^2 + \sin(xy)$ для равноотстоящих значений уровня C. Видно, что чем быстрее возрастает функция, тем теснее расположены линии уровня.

Простейшим примером векторного поля служит *радиус-вектор*

$$\vec{r} = \vec{i}\,x + \vec{j}\,y + \vec{k}\,z\,, \tag{9.2}$$

испущенный из начала координат в точку с координатами (x, y, z). С его помощью скалярные и векторные поля трактуют как функции векторного аргумента $\vec{r}$ и обозначают их, соответственно, $U(\vec{r}\,)$ и $\vec{A}\,(\vec{r}\,)$.

Определим еще два важных понятия, способствующие лучшему геометрическому восприятию скалярных и векторных полей.

Определение 9.3 *Поверхностью уровня скалярного поля $U(\vec{r}\,)$, определенного в области Ω, называют геометрическое место точек, в которых поле принимает заданное фиксированное значение C:*

$$U(\vec{r}\,) = C\,.$$

Очевидно, что поверхности уровня заполняют всю область Ω определения функции, и что любые две поверхности $U(\vec{r}\,) = C_1$ и $U(\vec{r}\,) = C_2$, отвечающие различным значения уровня $C_1 \neq C_2$, не имеют общих точек: через каждую точку проходит только одна поверхность уровня.

Эффективным средством визуализации векторных полей служат их *векторные линии*:

Определение 9.4 *Пусть в области Ω 3-х мерного пространства задано векторное поле $\vec{A}(\vec{r}\,)$. Кривую $\mathcal{L} \in \Omega$ называют векторной линией векторного поля $\vec{A}(\vec{r}\,)$, если в каждой точке этой кривой направление касательной к ней совпадает с направлением поля $\vec{A}$ в этой точке.*

Замечание 9.1 В физике векторные линии часто называют *силовыми линиям*, особенно когда речь идет о силовых полях, например о гравитационном силовом поле.

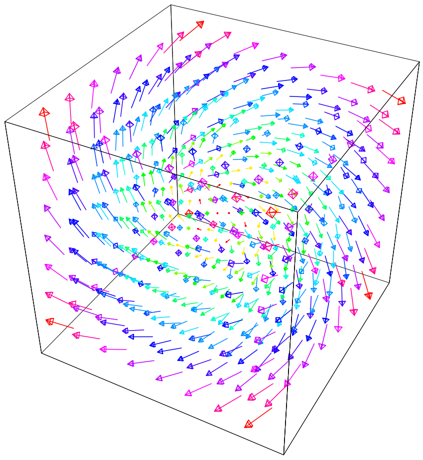

Рис. 9.2: Изображение векторов векторного поля $\vec{A} = \vec{i}\,y + \vec{j}\,z - \vec{k}\,x$. Видно, что векторы в разных точках пространства, выстраиваясь в хвост друг другу, образуют цепочки, близкие к векторным линиям.

Дифференциальные операции со скалярными и векторными полями. К скалярным и векторным полям применимы дифференциальные операции *градиента, производной по направлению, дивергенции и ротора.* Они обладают тем замечательным свойством, что результат их действия не зависит от системы координат, а лишь от геометрических свойств скалярных и векторных полей. Последнее делает упомянутые дифференциальные операции ценным инструментом описания законов природы, справедливых безотносительно того, в каких координатах исследуется то или иное природное явление. Сами же системы координат играют подчиненную роль: они как бы служат каркасом, позволяющим перевести геометрические соотношения и свойства на язык функциональных зависимостей.

Определим операции градиента, дивергенции и ротора в инвариантной, не связанной с какой-либо системой координат, форме. Для этого нам понадобится понятие *производной по объему.* В отличие от стандартных производных, производная по объему применима к функциям, аргументами которых служат не точки числовой оси, а области 3-х мерного пространства. Подобные функции часто называют *функционалами.* Пусть $\mathbb{T}$ –произвольная область с кусочно-гладкой границей $\mathcal{S}$ и объемом $V(\mathbb{T})$, а $F(\mathbb{T})$ –скалярный или векторный функционал, отображающий области $\mathbb{T}$ в точки числовой оси (скалярный функционал) или в элементы множества векторов в трехмерном пространстве (векторный функционал). Будем считать области $\mathbb{T}$ ограниченными, то есть имеющими конечный диаметр $d < \infty$.

Определение 9.5 *Диаметром трехмерной области назовем диаметр наименьшего шара, в который вписывается данная область.*

Определение 9.6 *Производная по объему от функции области $F(\mathbb{T})$ в точке M равна пределу*

$$\lim_{\mathbb{T}\to M} \frac{F(\mathbb{T})}{V(\mathbb{T})} \tag{9.3}$$

–отношения функции области $\mathbb{T}$ к ее объему, при стремлении диаметра области $\mathbb{T}$ к нулю.

Замечание 9.2 Иногда говорят о пределе при *стягивании* области $\mathbb{T}$ в точку M, поскольку подразумевается, что при любом $d \to 0$ точка $M \in \mathbb{T}$, а область сжимается в указанную предельную точку.

Теперь мы полностью подготовлены к тому чтобы дать инвариантное определение градиента:

Определение 9.7 *Градиентом скалярного поля $U(M)$ называют производную по объему от векторного функционала*

$$\vec{F}\,(\mathbb{T}) = \iint\limits_{\mathcal{S}} \vec{n}\,(M)\, U(M)\, dS\,.$$

Здесь $\vec{n}\,(M)$ –внешняя единичная нормаль в точке M замкнутой кусочно-гладкой поверхности $\mathcal{S}$, ограничивающей область $\mathbb{T}$, а $U(M)$ –скалярное поле, градиент которого мы собираемся вычислить.

Еще раз подчеркнем: данное определение градиента “не привязано” к какой-либо конкретной системе координат. С другой стороны, с его помощью можно найти явное выражение градиента в любой координатной системе. Пусть, к примеру, скалярное поле представимо в виде функции 3-х декартовых координат точки M: $U(\vec{r}) = U(x, y, z)$. Тогда нетрудно показать, выбрав за область $\mathbb{T}$ куб с гранями, параллельными координатным плоскостям, и вычислив предел

$$\lim_{\mathbb{T}\to M} \frac{1}{V(\mathbb{T})} \iint\limits_{\mathcal{S}} \vec{n}\,(\vec{r})\, U(\vec{r})\, dS\,,$$

что градиент скалярной функции $U(x, y, z)$ равен

$$\operatorname{grad} U = \vec{i}\,\frac{\partial U}{\partial x} + \vec{j}\,\frac{\partial U}{\partial y} + \vec{k}\,\frac{\partial U}{\partial z}\,. \tag{9.4}$$

Опираясь на эту формулу, легко убедиться в справедливости соотношений

$$\begin{gathered} \operatorname{grad}\,[f(\vec{r}) + g(\vec{r})] = \operatorname{grad} f(\vec{r}) + \operatorname{grad} g(\vec{r})\,, \\ \operatorname{grad} f(\vec{r})\, g(\vec{r}) = g(\vec{r}) \operatorname{grad} f(\vec{r}) + f(\vec{r}) \operatorname{grad} g(\vec{r})\,, \end{gathered} \tag{9.5}$$

переносящих на случай градиента правила дифференцирования суммы и произведения функций, а также правило дифференцирования сложной функции:

$$\operatorname{grad} U\,(h(\vec{r})) = \frac{dU}{dh} \operatorname{grad} h(\vec{r})\,. \tag{9.6}$$

Само собой, перечисленные свойства градиента, будучи выведены в декартовой системе координат, остаются справедливыми, в какой бы системе координат мы не работали.

Градиент служит удобным инструментом анализа геометрических свойств скалярных полей. Поясним сказанное на примере понятия *производной по направлению*:

Определение 9.8 *Производной, в направлении единичного вектора $\vec{\ell}$, от скалярной функции $U(\vec{r}\,)$, называют предел*

$$\frac{\partial U}{\partial \ell} = \lim_{t\to 0} \frac{U(\vec{r}+t\vec{\ell}) - U(\vec{r}\,)}{t} \, .$$

Нетрудно показать, что производная по направлению $\vec{\ell}$ равна скалярному произведению градиента функции U и данного единичного вектора:

$$\frac{\partial U}{\partial \ell} = \left(\operatorname{grad} U \cdot \vec{\ell}\right) . \tag{9.7}$$

Раскроем, с помощью понятия производной по направлению, геометрический смысл градиента. Он состоит в следующем:

Вектор $\operatorname{grad} U$ *указывает направление наибыстрейшего возрастания скалярного поля U, а величина градиента равна производной поля вдоль этого направления.*

Действительно, согласно (7) и геометрическому смыслу скалярного произведения, производная по направлению равна

$$\frac{\partial U}{\partial \ell} = |\operatorname{grad} U| \cos\varphi \, , \tag{9.8}$$

где φ –угол между векторами $\operatorname{grad} U$ и $\vec{\ell}$. Отсюда видно, что производная по направлению принимает наибольшее значение, равное величине градиента, лишь если $\operatorname{grad} U \parallel \vec{\ell}$ (то есть $\varphi = 0$, а $\cos\varphi = 1$).

Как уже отмечалось, наилучшее визуальное представление о поведении скалярных полей в пространстве дают поверхности равного уровня, вдоль которых поле принимает одинаковые значения: $U(\vec{r}\,) = \text{const}$. Очевидно, производная по направлениям, касательным к поверхности уровня, равна нулю. Отсюда и из формулы (8) вытекает еще одно важное свойство градиента:

Градиент поля U в любой точке M перпендикулярен поверхности уровня поля U в данной точке.

Заметим еще, что с помощью градиента скалярного поля удобно записывать его дифференциал. Пусть $d\vec{r}$ –дифференциал радиус-вектора в направлении единичного вектора $\vec{\ell}$. Его можно записать в виде: $d\vec{r} = \vec{\ell}\, dr$, где dr –длина вектора $d\vec{r}$. Помножив обе части равенства (7) на dr, будем иметь:

$$dU = (\operatorname{grad} U \cdot d\vec{r}\,) \, .$$

Важно заметить, что это соотношение имеет обратную силу. А именно, если удается представить дифференциал некоего скалярного поля $U(\vec{r}\,)$ в форме $dU = (\vec{A} \cdot d\vec{r})$, то вектор $\vec{A}(\vec{r}\,)$ и есть градиент скалярного поля $U(\vec{r}\,)$. Для примера найдем таким способом градиент модуля радиус-вектора $\vec{r}$. Очевидно:

$$r^2 = (\vec{r}\cdot\vec{r}\,) \Rightarrow 2r\, dr = 2(\vec{r}\cdot d\vec{r}\,) \Rightarrow dr = \left(\frac{\vec{r}}{r}\cdot d\vec{r}\right) .$$

Отсюда имеем:

$$\operatorname{grad} r = \frac{\vec{r}}{r} \, .$$

Перейдем к инвариантному определению дивергенции векторного поля $\vec{A}(M)$. Для этого построим скалярный функционал

$$F(\mathbb{T}) = \iint\limits_{\mathcal{S}} \left(\vec{n}(M) \cdot \vec{A}(M)\right) dS\,, \tag{9.9}$$

где, как и прежде, $\mathcal{S}$ –замкнутая поверхность ограниченной области $\mathbb{T}$.

Определение 9.9 *Дивергенцией векторного поля $\vec{A}(M)$ называют производную по объему от данного функционала:*

$$\operatorname{div}\vec{A}(M) = \lim_{\mathbb{T}\to M} \frac{1}{V(\mathbb{T})} \iint\limits_{\mathcal{S}} \left(\vec{n}(M) \cdot \vec{A}(M)\right) dS\,. \tag{9.10}$$

Входящий сюда функционал имеет физический смысл потока векторного поля $\vec{A}(M)$ сквозь замкнутую поверхность $\mathcal{S}$. Если он не равен нулю внутри некоторой области $\mathbb{T}$, то говорят, что внутри области $\mathbb{T}$ расположены *источники*, порождающие поле $\vec{A}(M)$. Таким образом, дивергенция векторного поля в точке M обычно трактуется как *плотность источников* векторного поля в этой точке.

Пользуясь инвариантным определением дивергенции, нетрудно показать, что в декартовой системе координат дивергенция векторного поля может быть вычислена по формуле

$$\operatorname{div}\vec{A} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\,. \tag{9.11}$$

Дадим в заключение инвариантное определение ротора векторного поля $\vec{A}$. Наиболее подходящее, с точки зрения физических приложений, определение ротора связано с *циркуляцией* векторного поля вдоль некоторого бесконечно малого контура $\mathcal{L}$, окаймляющего плоскую площадку $\mathcal{S}$:

Определение 9.10 *Пусть $\vec{n}$ –единичный вектор нормали к одной из сторон указанной площадки, содержащей точку M, где мы намерены вычислить ротор векторного поля $\vec{A}$. Проекцией вектора ротора поля $\vec{A}$ на направление $\vec{n}$ называют предел*

$$\left(\operatorname{rot}\vec{A} \cdot \vec{n}\right) = \lim_{\mathcal{S}\to M} \frac{1}{S} \oint\limits_{\mathcal{L}} \left(\vec{A} \cdot d\vec{r}\right)\,. \tag{9.12}$$

Здесь S –площадь указанной площадки, $d\vec{r}$ элемент контура, ориентированный в выбранном направлении обхода, а направление обхода контура $\mathcal{L}$ согласовано с выбранным направлением нормали к площадке $\mathcal{S}$.

Напомним:

Определение 9.11 *Нормаль двусторонней поверхности и обход ограничивающего ее контура считают согласованными, если при обходе контура по стороне, отвечающей выбранному направлению нормали, поверхность остается слева. При этом согласованное направление обхода плоской площадки совпадает с движением против часовой стрелки, если смотреть со стороны, указанной вектором нормали $\vec{n}$.*

Раскрывая предел (12) в декартовой системе координат и поочередно ориентируя площадку $\mathcal{S}$ перпендикулярно разным осям, нетрудно показать, что ротор векторного поля (1) вычисляется по формуле

$$\begin{gathered}\operatorname{rot}\vec{A}(\vec{r}) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \\ \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\vec{k}\,. \end{gathered} \tag{9.13}$$

Потенциальные и соленоидальные поля. Заметим в заключение, что в теории поля выделяют два сорта векторных полей: *потенциальные* и *соленоидальные* поля. Последние называют еще вихревыми полями.

Определение 9.12 *Потенциальными называют поля, равные градиенту некоторого скалярного поля:*

$$\vec{A} = \operatorname{grad} U(\vec{r})\,.$$

При этом скалярное поле U называют *потенциалом* векторного поля $\vec{A}$. Потенциал любого потенциального векторного поля определяется с точностью до произвольной постоянной.

Нетрудно показать, что необходимым и достаточным условием потенциальности векторного поля в некоторой области Ω является тождественное равенство нулю ротора поля в этой области.

Определение 9.13 *Векторное поле $\vec{B}$ называют соленоидальным, если найдется другое векторное поле $\vec{\Psi}$, такое, что его ротор равен исходному полю:*

$$\vec{B} = \operatorname{rot}\vec{\Psi}\,.$$

При этом поле $\vec{\Psi}$ называют *векторным потенциалом* соленоидального поля $\vec{B}$. Причем векторный потенциал определяется с точностью до потенциального векторного поля.

Необходимым и достаточным условием соленоидальности векторного поля в некоторой области Ω является тождественное равенство нулю дивергенции поля в этой области.

Можно задаться вопросом — какими еще, кроме потенциальных и соленоидальных, могут быть векторные поля. На него дает ответ *основная теорема векторного анализа:*

Любое непрерывно-дифференцируемое векторное поле представимо представлено в виде суммы потенциального и соленоидального полей.)

На этом занятии мы решим несколько задач, нацеленных на обсуждение геометрического смысла скалярных и векторных полей, и результатов применения к ним описанных выше дифференциальных операций векторного анализа.

9.2 Задачи в классе

Задача 9.1
(4401.1) Пусть $U = xy - z^2$. Найти величину и направление вектора $\operatorname{grad} U$ *в точке $M(-9,\, 12,\, 10)$. Чему равна производная $\partial U/\partial \ell$ в направлении биссектрисы координатного угла xOy?*

Решение 9.1 Несложные вычисления по формуле (4) дают:

$$\operatorname{grad} U = \vec{i}\, y + \vec{j}\, x - \vec{k}\, 2z$$

и, в частности, в заданной точке

$$\operatorname{grad} U(M) = \vec{i}\, 12 - \vec{j}\, 9 - \vec{k}\, 20\,.$$

Величина этого вектора равна:

$$|\operatorname{grad} U(M)| = \sqrt{144 + 81 + 400} = 25\,.$$

Направление вектора принято характеризовать значениями *направляющих косинусов*: косинусов углов вектора к осям координат. Они в нашем случае равны:

$$\cos\alpha = \Big(\vec{i} \cdot \operatorname{grad} U(M)\Big) = \frac{12}{25}\,, \quad \cos\beta = \Big(\vec{j} \cdot \operatorname{grad} U(M)\Big) = -\frac{9}{25}\,,$$
$$\cos\gamma = \Big(\vec{k} \cdot \operatorname{grad} U(M)\Big) = -\frac{4}{5}\,. \qquad (*)$$

Вычислим требуемую производную по направлению. Для этого выпишем единичный вектор, направленный по биссектрисе координатного угла xOy:

$$\vec{\ell} = \vec{i}\, \frac{1}{\sqrt{2}} + \vec{j}\, \frac{1}{r\sqrt{2}}\,.$$

Соответственно:

$$\frac{\partial U}{\partial \ell} = \Big(\operatorname{grad} U \cdot \vec{\ell}\Big) = \frac{12}{\sqrt{2}} - \frac{9}{\sqrt{2}} = \frac{3}{\sqrt{2}}\,.$$

Замечание 9.1 Из решения видно, что производная по направлению в указанной точке существенно меньше модуля градиента функции в данной точке. Иными словами, направление биссектрисы координатного угла xOy не оптимально в том смысле, что сильно отличается от направления быстрейшего возрастания функции. Выясним степень неоптимальности выбранного направления, вычислив угол φ между направлением градиента и направлением биссектрисы. Косинус этого угла равен скалярному произведению вектора $\vec{\ell}$ и единичного вектора

$$\vec{n} = \vec{i}\, \frac{12}{25} - \vec{j}\, \frac{9}{25} - \vec{k}\, \frac{4}{5}$$

–координатами которого служат направляющие косинусы $(*)$:

$$\cos\varphi = \Big(\vec{\ell} \cdot \vec{n}\Big) = \frac{3}{25\sqrt{2}} \simeq 0.085\,.$$

Отсюда следует, что угол между направлением наибыстрейшего возрастания функции и направлением биссектрисы координатного угла xOy: $\varphi = \arccos 0.085 \simeq 85^\circ$ -близок к углу 90° между направлением градиента и касательной к поверхности равного уровня, проходящей через рассматриваемую точку.

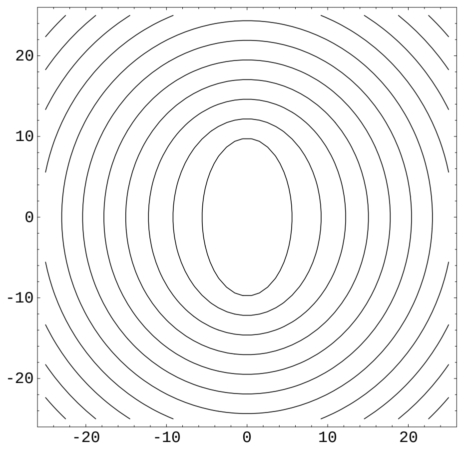

Рис. 9.3: Иллюстрация к задаче 2: Линии равного уровня скалярного поля (∗), представляющие собой вложенные друг в друга эллипсы. Видно, что чем дальше от общего центра, тем более округлыми становятся эллипсы.

Задача 9.2
(4404) Построить поверхность уровня скалярного поля

$$U = \sqrt{x^2 + y^2 + (z+8)^2} + \sqrt{x^2 + y^2 + (z-8)^2}\,,$$

проходящую через точку $M\,(9,\ 12,\ 28)$. *Чему равен* $\max U$ *в области* $x^2 + y^2 + z^2 \leq 36$*?*

Решение 9.2 Заметим прежде всего, что координаты x и y входят уравнение в виде симметричной комбинации x^2+y^2, а значит поверхности равного уровня образуют фигуры вращения. Их можно получить, вращая сечение поверхностей уровня плоскостью $y = 0$ вокруг оси z. Поэтому мы составим полное представление о форме поверхностей уровня, если положим в исходном уравнении $y = 0$ и обсудим форму кривых равного уровня функции

$$U = \sqrt{x^2 + (z+8)^2} + \sqrt{x^2 + (z-8)^2}\,. \qquad (*)$$

Правая часть здесь имеет наглядный геометрический смысл – это сумма расстояний произвольной точки плоскости (x, z) до двух точек с координатами $(0, c)$ и $(0, -c)$, где $c = 8$. Как мы знаем из курса аналитической геометрии, эллипс представляет собой геометрическое место точек, сумма расстояний которых до его фокусов одинакова. Таким образом, кривые равного уровня являются эллипсами с фокусами в указанных точках, симметрично расположенных на оси z.

Следуя стандартным обозначениям, принятым в аналитической геометрии, обозначим заданное значение нашей функции на эллипсе равного уровня за $U = 2a$, и заметим, что a –это длина *большой полуоси* эллипса, лежащей на оси z. Вспомним еще, что длина малой полуоси, расположенной на оси x, равна $b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{a^2 - 64}$. Отсюда (или из неравенства треугольника) следует, что наименьшее значение функции (∗), равно

$U_{\min} = 2c = 16$. Оно достигается на вырожденном эллипсе –отрезке оси z между фокусами $F_1(0,-8)$ и $F_2(0,8)$.

С ростом $U > 16$ эллипсы равного уровня становятся "все более округлыми", асимптотически приближаясь по форме к концентрическим окружностям.

Конкретную поверхность уровня, проходящую через точку $M(9,12,28)$, найдем, подставив координаты этой точки в заданное в условии задачи уравнение поверхности:

$$U = U(M) = \sqrt{81+144+1296} + \sqrt{81+144+400}$$
$$= \sqrt{1521} + \sqrt{625} = 39 + 25 = 64\,.$$

Отсюда бо̀льшая ось проходящего через эту точку эллипсоида вращения равна

$$a = U/2 = 32 \to a^2 = 2^{10} = 1024\,,$$

а малая ось

$$b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{1024 - 64} = \sqrt{960} = 8 \to b^2 = 960\,.$$

Таким образом, интересующая нас поверхность – эллипсоид вращения, заданный каноническим уравнением:

$$\frac{x^2}{960} + \frac{y^2}{960} + \frac{z^2}{1024} = 1\,.$$

Этим завершается решение первой части поставленной задачи. Приступим ко второй ее части: Найдем максимальное значение поля U в шаре $x^2 + y^2 + z^2 \leq 36$. Для этого заметим, опираясь на опыт решения первой части задачи, что шар полностью лежит в эллипсоиде уровня, чья полуось на оси x равна 6. Кроме того очевидно, что значения поля U внутри эллипсоида уровня меньше, чем на его поверхности. Иными словами, искомое максимальное значение поля U достигается в точках соприкосновения шара с эллипсоидом уровня, например, в точке $(x = 6, y = 0, z = 0)$. Следовательно, требуемое максимальное значение найдем, приравняв квадрат полуоси эллипса b^2 к 36:

$$b^2 = 36 \Rightarrow a^2 = b^2 + c^2 = 36 + 64 = 100 \Rightarrow a = 10 \Rightarrow U = 2a = 20\,.$$

Задача 9.3
(4410) Найти $\operatorname{grad} f(r)$*, где* $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

Решение 9.3 Используя правило вычисления градиента сложной функции (6), имеем:

$$\operatorname{grad} f(r) = f'(r) \operatorname{grad} r\,.$$

где

$$\operatorname{grad} r = \vec{i}\,\frac{x}{r} + \vec{j}\,\frac{y}{r} + \vec{k}\,\frac{y}{r} = \frac{\vec{r}}{r}\,.$$

–градиент радиус-вектора. Таким образом, окончательно:

$$\operatorname{grad} f(r) = f'(r)\,\frac{\vec{r}}{r}\,.$$

Замечание 9.1 Геометрический смысл полученного результата предельно ясен и состоит в том, что градиент центрально-симметричного скалярного поля, зависящего лишь от расстояния до центра координат, ориентирован в направлении от центра к выбранной точке, если $f'(r) > 0$, или в противоположном направлении, если $f'(r) < 0$. Соответственно, входящий в выражение для градиента центрально-симметричной функции единичный вектор

$$\vec{n} = \frac{\vec{r}}{r}$$

перпендикулярен ее поверхностям равного уровня –концентрическим сферам с центром в начале координат.

Задача 9.4
(4416) Найти производную поля

$$u = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}$$

в данной точке $M(x, y, z)$ в направлении радиус-вектора $\vec{r}$ этой точки. В каком случае эта производная равна величине градиента?

Решение 9.4 Градиент заданного скалярного поля имеет вид:

$$\operatorname{grad} u = 2\left(\vec{i}\,\frac{x}{a^2} + \vec{j}\,\frac{y}{b^2} + \vec{k}\,\frac{z}{c^2}\right) ,$$

а производная по направлению $\vec{n}$ радиус-вектора равна:

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \left(\operatorname{grad} u, \frac{\vec{r}}{r}\right) = \frac{2}{r}\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}\right) = \frac{2u}{r} ,$$

где, как и прежде,$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ –длина радиус-вектора, а $\vec{n} = \vec{r}/r$ –единичный вектор в направлении радиус-вектора.

Найдем теперь, в каком случае производная в направлении радиус-вектора будет равна модулю градиента:

$$\frac{\partial u}{\partial n} = |\operatorname{grad} u| \ .$$

Это легко выяснить из геометрических соображений: Производная по направлению равна модулю градиента, лишь если выбранные направления перпендикулярны поверхностям равного уровня, и направлены в сторону увеличения уровня. Выбранные направления перпендикулярны концентрическим сферам с центром в начале координат. Поэтому производная по направлению будет всюду совпадать с величиной градиента, лишь если поверхности равного уровня нашего поля будут совпадать с указанными концентрическими сферами. Из уравнения поля видно, что последнее имеет место лишь если $a = b = c$.

Задача 9.5
(4420) Определить силовые линии векторного поля

$$\vec{A} = \vec{i}\,x + \vec{j}\,y + \vec{k}\,2z\,.$$

Решение 9.5 Напомним, силовой или векторной линией векторного поля называют кривую, чей касательный вектор в каждой точке кривой направлен вдоль данного векторного поля. Зададим искомую силовую линию некоторого векторного поля $\vec{A}(\vec{r})$ в параметрической форме $\vec{r} = \vec{r}(t)$, где t – параметр, отсчитываемый вдоль силовой линии. В математической форме данное выше определение силовой линии запишется в виде:

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \lambda \vec{A}(\vec{r})\,,$$

где $\lambda \neq 0$ – произвольная постоянная. Очевидно, ее можно приравнять к единице подходящим выбором масштаба параметра t. При этом уравнение силовой линии сводится к системе 3-х обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{A}(\vec{r})\,.$$

В развернутой форме и для заданного в условии задачи векторного поля они имеют вид

$$\frac{dx}{dt} = x\,, \quad \frac{dy}{dt} = y\,, \quad \frac{dz}{dt} = 2z\,.$$

Общие решения этих уравнений таковы:

$$x = C_1 e^t\,, \quad y = C_2 e^t\,, \quad z = C_3 e^{2t}\,.$$

Исключив t, к примеру, с помощью 1-го уравнения, получим окончательно:

$$y = c_1 x\,, \quad z = {}_2 x^2\,.$$

Здесь введены новые произвольные постоянные $c_1 = C_2/C_1$ и $c_2 = C_3/C_1^2$.

Замечание 9.1 Более прямой путь решения поставленной задачи сводится к записи уравнений силовой линии в следующей геометрически наглядной форме:

$$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{R}\,.$$

В нашем случае отсюда вытекают уравнения

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}\,, \quad \frac{2z}{x}\,,$$

решения которых нам уже известны.

Задача 9.6

(4431) Жидкость, заполняющая пространство, вращается вокруг оси z против часовой стрелки с постоянной угловой скоростью ω. Найти дивергенцию векторного поля скорости $\vec{v}$ и векторного поля ускорения частиц жидкости $\vec{w}$ в произвольной точке $M(x,\,y,\,z)$ пространства в текущий момент времени.

Решение 9.6 Сконструируем поле скорости из вектора угловой скорости вращения жидкости $\vec{\omega} = \vec{k}\,\omega$ и радиус-вектора $\vec{r}$. Как известно, векторное поле скорости движения жидкости равно векторному произведению указанных векторов

$$\vec{v}(\vec{r}) = [\vec{\omega} \times \vec{r}\,] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & \omega \\ x & y & z \end{vmatrix} = -\vec{i}\omega y + \vec{j}\omega x\,.$$

Найдем векторное поле ускорения. Для этого мысленно выделим материальную точку жидкости, движение которой с течением времени описывается некоторой функцией $\vec{r} = \vec{r}\,(t)$. Зная скорость движения жидкости в каждой ее точке, нетрудно записать уравнение движения материальной точки:

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v} = [\vec{\omega} \times \vec{r}\,(t)]\ .$$

Дифференцируя это равенство по времени, получим:

$$\vec{w} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \left[\vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}}{dt}\right] = [\vec{\omega} \times \vec{v}\,]\ .$$

Расписывая векторное произведение, будем иметь:

$$\vec{w} = [\vec{\omega} \times \vec{v}\,] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & \omega \\ -\omega y & \omega x & 0 \end{vmatrix} = -\vec{i}\,\omega^2 x - \vec{j}\,\omega^2 y = -\omega^2 \vec{\rho}.$$

Здесь выделен перпендикулярный вектору угловой скорости вспомогательный вектор $\vec{\rho} = \vec{i}\,x + \vec{j}\,y$, величина которого равна расстоянию от точки пространства до оси z.

Вычислим теперь дивергенцию полей скорости и ускорения равномерно вращающейся вокруг оси z жидкости. Пользуясь формулой (11), в нашем случае имеем:

$$\operatorname{div}\vec{v} = -\omega\frac{\partial y}{\partial x} + \omega\frac{\partial x}{\partial y} = 0\,,$$

$$\operatorname{div}\vec{w} = -\omega^2\frac{\partial x}{\partial x} - \omega^2\frac{\partial y}{\partial y} = -2\omega^2\,.$$

Задача 9.7

(4436.1) Найти величину и направление вектора $\operatorname{rot}\vec{A}$*, в точке* $M(1,\,2,\,-2)$*, если*

$$\vec{A} = \vec{i}\,\frac{y}{z} + \vec{j}\,\frac{z}{x} + \vec{k}\,\frac{x}{y}\,.$$

Решение 9.7 Ротор в декартовой системе координат равен определителю (13). Откуда имеем:

$$\operatorname{rot}\vec{A} = \vec{i}\left(-\frac{x}{y^2} - \frac{1}{x}\right) + \vec{j}\left(-\frac{y}{z^2} - \frac{1}{y}\right) + \vec{k}\left(-\frac{z}{x^2} - \frac{1}{z}\right)\,.$$

Подставив сюда координаты заданной точки, получим:

$$\operatorname{rot}\vec{A}(M) = \vec{i}\left(-\frac{1}{4} - 1\right) + \vec{j}\left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right) + \vec{k}\left(2 + \frac{1}{2}\right)\,.$$

Таким образом, окончательно:

$$\operatorname{rot}\vec{A}(M) = -\vec{i}\,\frac{5}{4} - \vec{j} + \vec{k}\,\frac{5}{2}\,.$$

Соответственно, величина этого вектора и его направляющие косинусы равны

$$\left|\operatorname{rot}\vec{A}(M)\right| = \frac{1}{4}\sqrt{25+16+100} = \frac{1}{4}\sqrt{141}\,,$$

$$\cos\alpha = -\frac{5}{\sqrt{141}}\,,\quad \cos\beta = -\frac{4}{\sqrt{141}}\,,\quad \cos\gamma = \frac{10}{\sqrt{141}}\,.$$

9.3 Домашнее задание

4401, 4403, 4405, 4417, 4418

Задача 9.8
(4401) Найти величину и направление градиента поля

$$U = x^2 + 2y^2 + 3z^2 + xy + 3x - 2y - 6z$$

в точках а) $O(0,0,0)$; б) $A(1,1,1)$ и в) $(2,0,1)$. В какой точке градиент поля равен нулю?

Решение 9.8 Градиент равен:

$$\operatorname{grad} U = \vec{i}\,(2x+y+3) + \vec{j}\,(4y+x-2) + \vec{k}\,6(z-1)\,.$$

В частности, в начале координат вектор градиента равен

$$\operatorname{grad} U = \vec{i}\,3 - \vec{j}\,2 - \vec{k}\,6\,.$$

Его длина

$$|\operatorname{grad} U(O)| = \sqrt{9+4+36} = 7\,.$$

Направление вектора характеризуют направляющие косинусы

$$\cos\alpha = \frac{3}{7}\quad \cos\beta = -\frac{2}{7}\quad \cos\gamma = -\frac{6}{7}\,.$$

Точно также находятся длины и направляющие косинусы в остальных точках.

Координаты точки M, где градиент обращается в нуль, найдем, приравняв нулю проекции градиента на оси координат, и решив полученную так систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} 2x + y = -3\,, \\ 4y + x = 2\,, \\ z = 1\,. \end{cases} \quad\Rightarrow\quad M(-2;1;1)\,.$$

Замечание 9.1 Следуя непременному правилу обсуждать геометрический смысл решаемых задач, заметим, что поверхности уровня заданного поля представляют собой вложенные друг в друга эллипсоиды, с центром в указанной точке M, где градиент поля равен нулю. Очевидно, в этой точке исследуемое скалярное поле минимально. Подставив координаты точки M в выражение для поля U, найдем его наименьшее значение: $U_{min} = U(M) = -7$.

Задача 9.9
(4403) Дано скалярное поле

$$U = \ln\frac{1}{r}\,,$$

где $r = \sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}$*. В каких точках пространства имеет место равенство* $|\mathrm{grad}U| = 1$*?*

Решение 9.9 Вычислим вначале градиент указанной функции. Согласно (6):

$$\mathrm{grad}\,U = -\frac{1}{r}\mathrm{grad}\,r = -\frac{\vec{r}}{r^2}\,.$$

Отсюда

$$|\mathrm{grad}\,U| = \frac{1}{r} \Rightarrow r = 1\,.$$

Таким образом, модуль градиента равен единице на поверхности сферы

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2 = 1\,.$$

Задача 9.10
(4405) Найти угол φ *между градиентами поля*

$$U = \frac{x}{x^2+y^2+z^2}$$

в точках $A(1,2,2)$ *и* $B(-3,1,0)$*.*

Решение 9.10 Вычислим градиент с помощью формулы (5) для градиента произведения двух скалярных функций, положив $f = x$ и $g = 1/r^2$, где $r^2 = x^2+y^2+x^2$ –квадрат радиус-вектора $\vec{r}$. Это дает:

$$\mathrm{grad}\,U = \frac{1}{r^2}\mathrm{grad}\,x + x\mathrm{grad}\,\frac{1}{r^2} = \frac{1}{r^2}\left[\vec{i}\left(1-\frac{2x^2}{r^2}\right) - \vec{j}\frac{2xy}{r^2} - \vec{k}\frac{2xz}{r^2}\right]\,.$$

Подставив сюда координаты входящих в условие задачи векторов A и B, будем иметь:

$$\mathrm{grad}\,U(A) = \frac{1}{9}\left\{\frac{7}{9},\,-\frac{4}{9},\,-\frac{4}{9}\right\}\,,\quad \mathrm{grad}\,U(A) = \frac{1}{10}\left\{-\frac{4}{5},\,\frac{3}{5},\,0\right\}\,.$$

Здесь специально вынесены за скобку длины искомых векторов, так что косинус угла φ между ними равен сумме произведений компонент, заключенных в фигурные скобки:

$$\cos\varphi = -\frac{7}{9}\frac{4}{5} - \frac{4}{9}\frac{3}{5} = -\frac{8}{9}\,,$$

а $\varphi =\simeq 153$ градуса.

Задача 9.11
(4417) Найти производную поля $U = 1/r$*, где* $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$*, в направлении* $\vec{\ell}\{\cos\alpha,\,\cos\beta,\,cos\gamma\}$*. В каком случае эта производная равна нулю?*

Решение 9.11 Градиент данного скалярного поля равен:

$$\operatorname{grad}\frac{1}{r} = -\frac{\vec{r}}{r^3}\,.$$

Соответственно, производная по направлению задается выражением:

$$\frac{\partial U}{\partial l} = -\frac{\left(\vec{r}\,,\vec{\ell}\right)}{r^3}\,.$$

Таким образом градиент равен нулю, когда $\vec{r}\perp\vec{l}$. Другими словами, градиент обращается в нуль во всех точках перпендикулярной вектору $\vec{\ell}$ плоскости, заданной уравнением $(\vec{\ell}\cdot\vec{r})$.

Задача 9.12
(4418) Найти производную поля $U(x, y, z)$ в направлении градиента поля $V(x, y, z)$.

Решение 9.12

$$\frac{\partial U}{\partial \ell} = \frac{(\operatorname{grad} U\cdot\operatorname{grad} V)}{|\operatorname{grad} V|}\,.$$