Глава 13

Приложения теории поля

13.1 Необходимые сведения из теории

Как известно, векторный анализ широко применяется в самых разнообразных разделах физики, от механики и электродинамики, до статистической физики и квантовой теории поля. При этом математические конструкции векторного анализа приобретают специфический, адекватный тем или иным физическим представлениям, смысл. На данном занятии мы, используя накопленные на предыдущих занятиях знания по векторному анализу и опыт вычисления криволинейных и поверхностных интегралов, решим несколько типичных для физики задач, оперируя уместными физическими понятиями и терминами. Напомним наиболее универсальные из них. Это понятие *потока*

$$\Pi = \iint\limits_{\mathcal{S}} (\vec{A} \cdot \vec{n}\,)\, dS \tag{13.1}$$

векторного поля $\vec{A}$ через заданную поверхность $\mathcal{S}$ в указанную вектором нормали $\vec{n}$ сторону.

Другое фундаментальное понятие – *работы*

$$U = \int\limits_{\mathcal{L}} (\vec{F} \cdot d\vec{r}\,) \tag{13.2}$$

силового поля $\vec{F}$ вдоль пробегаемой в заданном направлении кривой $\mathcal{L}$. В иных физических задачах, к примеру если $\vec{F} = \vec{H}$ –магнитное поле, а контур $\mathcal{L}$ замкнут, предпочитают говорить о *циркуляции*

$$\Gamma = \oint\limits_{\mathcal{L}} (\vec{H} \cdot \vec{\tau}\,) d\ell \tag{13.3}$$

векторного поля $\vec{H}$ вдоль контура $\mathcal{L}$. Здесь $\vec{\tau}$ –единичный, касательный к гладкому контуру $\mathcal{L}$ вектор, указывающий направление циркуляции.

Помимо собственно физической подоплеки, перечисленные понятия еще и геометрически наглядны, что порой служит хорошим подспорьем при решении сопутствующих математических задач.

В отличие от предшествующих занятий, где специально отбирались задачи, нацеленные на освоение того или иного раздела векторного анализа, здесь мы попытаемся имитировать атмосферу реальных исследований, когда сталкиваются с самыми разнообразными проблемами, и для решения их приходится поднимать весь накопленный ранее багаж.

13.2 Задачи в классе

Задача 13.1
(4441) Найти поток радиус-вектора $\vec{r}$:
а) через боковую поверхность конуса $x^2 + y^2 \leq z^2 \quad (0 \leq z \leq h)$;
б) через основание этого конуса.

Решение 13.1 а) На боковой поверхности конуса вектор его нормали $\vec{n}$ и радиус вектор $\vec{r}$ перпендикулярны, поскольку данный конус является одной из векторных трубок поля $\vec{r}$. Поэтому его поток

$$\Pi = \iint\limits_{S} (\vec{r} \cdot \vec{n}\,)\, dS$$

через коническую поверхность равен нулю.

б) Нормалью $\vec{n}$ к основанию конуса служит вектор $\vec{k}$ –орт оси z. Поэтому скалярное произведение нормали и радиус-вектора $\vec{r} = \vec{i}\,x + \vec{j}\,y + \vec{k}\,z$ во всех точках основания одинаково и равно: $(\vec{k} \cdot \vec{r}\,) = h$.

Из сказанного следует, что

$$\Pi = \iint\limits_{S} (\vec{r} \cdot \vec{n}\,)\, dS = h\, S\,,$$

где $S = \pi\, h^2$ –площадь круга, лежащего в основании конуса.

Задача 13.2
(4442) Найти поток вектора $\vec{A} = \vec{i}\, yz + \vec{j}\, xz + \vec{k}\, xy$:
а) через боковую поверхность цилиндра $x^2 + y^2 \leq a^2 \quad (0 \leq z \leq h)$;
б) через полную поверхность этого цилиндра.

Решение 13.2 а) В отличие от предыдущей задачи, где простые геометрические соображения позволили вычислить поверхностный интеграл, здесь геометрия интегрируемого векторного поля не очень ясна. Поэтому приходится прибегнуть к регулярному методу вычисления поверхностных интегралов. Он состоит в переходе к двойному интегралу

$$\iint\limits_{S} (\vec{A} \cdot \vec{n}\,) dS = \iint\limits_{\Omega} (\vec{A}, \vec{r}_u, \vec{r}_v) du dv\,.$$

Напомним, здесь $\vec{r} = \vec{r}(u, v)$ –параметрическое уравнение поверхности интегрирования $\mathcal{S}$, а Ω –область на плоскости параметров (u, v), куда отображается $\mathcal{S}$. Напомним еще, что для справедливости данной формулы надо, чтобы вектор нормали к выбранной стороне поверхности $\vec{n}$ и векторы $\vec{r}_u$, $\vec{r}_v$ образовывали правую тройку.

Желая максимально использовать симметрию цилиндрической поверхности, возьмем в качестве параметров цилиндрические координаты. С их помощью радиус-вектор поверхности запишется в виде:

$$\vec{r} = \vec{i}\, a\cos\varphi + \vec{j}\, a\sin\varphi + \vec{k}\, z \qquad (0 \le \varphi \le 2\pi\,, \quad 0 \le z \le h)\,.$$

Стоящие в скобках неравенства можно трактовать как уравнения прямоугольника в плоскости $(\varphi,\, z)$, на который проектируется боковая поверхность цилиндра. В итоге выражение для потока сводится к двойному интегралу:

$$\Pi = \iint\limits_S (\vec{A}\cdot\vec{n}\,)\, dS = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^h (\vec{A}, \vec{r}_\varphi, \vec{r}_z) dz\,.$$

Вычислим входящее сюда смешанное произведение векторов $\vec{A}$, $\vec{r}_\varphi$ и $\vec{r}_z$:

$$(\vec{A}, \vec{r}_\varphi, \vec{r}_z) = \begin{vmatrix} za\sin\varphi & za\cos\varphi & a^2\cos\varphi\sin\varphi \\ -a\sin\varphi & a\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = za^2\sin 2\varphi\,.$$

Подставив это выражение в интеграл, получим:

$$\Pi = a^2\int_0^{2\pi} d\varphi \sin 2\varphi \int_0^h z\, dz = 0\,.$$

б) Хотя рассмотренная выше поверхность не была замкнутой, предыдущий результат наводит на мысль –а не равна ли нулю дивергенция интегрируемого векторного поля? Проверим нашу догадку, вычислив дивергенцию заданного векторного поля. Несложные расчеты показывают, что

$$\operatorname{div}\vec{A} = \frac{\partial}{\partial x}yz + \frac{\partial}{\partial y}xz + \frac{\partial}{\partial z}xy \equiv 0$$

–наше поле соленоидально и, по теореме Гаусса-Остроградского, поток через полную поверхность цилиндра с “дном и крышкой” равен нулю.

Задача 13.3
(4443) Найти поток радиус-вектора $\vec{r}$ через поверхность

$$z = 1 - \sqrt{x^2+y^2} \quad (0 \le z \le 1)\,.$$

Решение 13.3 Поверхность напоминает колпак –перевернутый конус, которым накрыли начало координат. Спроектируем колпак на плоскость (x, y) и перейдем в ней к полярной системе координат. При этом векторное параметрическое уравнение поверхности запишется в виде:

$$\vec{r} = \vec{i}\,\rho\cos\varphi + \vec{j}\,\rho\sin\varphi + \vec{k}\,(1-\rho)\,.$$

Соответственно искомый поток выразится через двойной интеграл:

$$\Pi = \iint\limits_S (\vec{r}\cdot\vec{n}\,)\, dS = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 (\vec{r},\, \vec{r}_\rho,\, \vec{r}_\varphi)\, d\rho\,.$$

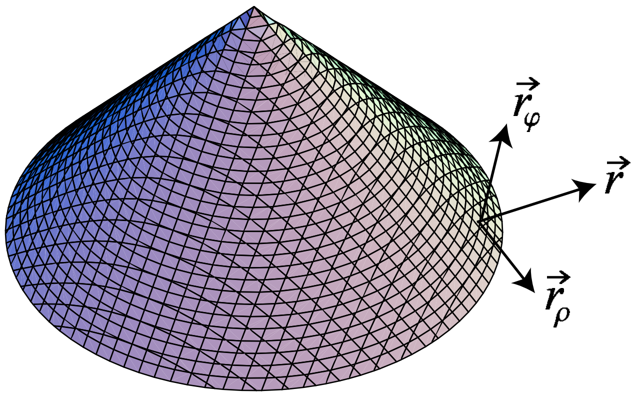

Рис. 13.1: Опрокинутый конус, фигурирующий в задаче 3. Требуется сосчитать поток сквозь него радиус-вектора $\vec{r}$. На рисунке изображены радиус-вектор и касательные к конусу векторы $\vec{r}_\rho$ и $\vec{r}_\varphi$ в некоторой его точке. При фиксированном ρ и изменении φ указанные векторы остаются "жестко связанными" — сохраняя величину и взаимную ориентацию.

Найдем входящее сюда смешанное произведение:

$$(\vec{r},\, \vec{r}_\rho,\, \vec{r}_\varphi) = \begin{vmatrix} \rho\cos\varphi & \rho\sin\varphi & 1-\rho \\ \cos\varphi & \sin\varphi & -1 \\ -\rho\sin\varphi & \rho\cos\varphi & 0 \end{vmatrix} .$$

Из геометрии задачи ясно, что нет необходимости вычислять этот довольно громоздкий определитель. В самом деле, нетрудно сообразить, что величина и взаимное расположение векторов $\vec{r}$, $\vec{r}_\rho$ и $\vec{r}_\varphi$ не зависит от угла φ. А значит объем $V = (\vec{r},\, \vec{r}_\rho,\, \vec{r}_\varphi)$ параллелепипеда, построенного на этих векторах, также не зависит от φ. Поэтому можно положить $\varphi = 0$ и сосчитать более простой определитель:

$$(\vec{r},\, \vec{r}_\rho,\, \vec{r}_\varphi) = \begin{vmatrix} \rho & 0 & 1-\rho \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & \rho & 0 \end{vmatrix} = \rho(1-\rho) + \rho^2 = \rho\,.$$

Подставив результат в двойной интеграл, получим:

$$\Pi = 2\pi \int_0^1 \rho\, d\rho = \pi\,.$$

Замечание 13.1 Мы бы скорее пришли к ответу, если бы лучше вникли в геометрию задачи и поняли, что поток через круг в плоскости (x, y), замыкающий нашу поверхность, равен нулю. По той причине, что радиус-вектор любой точки этой плоскости перпендикулярен ее вектору нормали $\vec{k}$. Следовательно, привлекая формулу Гаусса-Остроградского, имеем:

$$\iint\limits_{\mathcal{S}} (\vec{A}\cdot\vec{n})dS = \iiint\limits_{\mathcal{V}} (\vec{\nabla}\cdot\vec{r})dV = 3\iiint\limits_{\mathcal{V}} dV = 3V\,,$$

где $V = \pi/3$ –объем конуса, ограниченного указанным в условии задачи колпаком и плоскостью $z = 0$.

Замечание 13.2 Ясное понимание геометрической сути проблемы позволяет легко найти поток и без помощи формулы Гаусса-Остроградского. Обратив внимание на то, что скалярное произведение $(\vec{r}\cdot\vec{n}\,)$ равно кратчайшему расстоянию от начала координат до образующих конуса, одинаковому для всех его образующих, получим:

$$\Gamma = \iint\limits_{\mathcal{S}} (\vec{A}\cdot\vec{n}\,)dS = (\vec{A}\cdot\vec{n}\,)\iint\limits_{\mathcal{S}} dS\,.$$

С другой стороны, поскольку все образующие конуса наклонены к плоскости $z=0$ под одинаковым углом $\gamma = 45^\circ$, имеем

$$\Gamma = (\vec{A}\cdot\vec{n}\,)\iint\limits_{\sigma} \frac{dxdy}{\cos\gamma}\,.$$

Здесь σ –круг в плоскости $z=0$, на который проектируется наш опрокинутый конус. Вынося косинус за знак интеграла и заметив, что в данной геометрии задачи $(\vec{r}\cdot\vec{n}\,) = \cos\gamma$, получим, что поток равен $\Gamma = \pi$ –площади упомянутого круга.

Задача 13.4
(4447) Найти поток вектора

$$\vec{A} = m\,\frac{\vec{r}}{r^3} \quad (m \;\; -)$$

через замкнутую поверхность $\mathcal{S}$, окружающую начало координат.

Решение 13.4 Первое, что приходит в голову –попытаться свести соответствующий поверхностный интеграл к объемному, применив формулу Гаусса-Остроградского:

$$I = \iint\limits_{\mathcal{S}} \left(\vec{A}\cdot\vec{n}\right)\,dS = \iiint\limits_{\mathcal{V}} \left(\vec{\nabla}\cdot\vec{A}(\vec{r}\,)\right)\,dV\,.$$

Однако здесь сразу возникает проблема, с которой мы уже сталкивались, решая шестую задачу 11-го занятия. Дело в том, что данное векторное поле недифференцируемо в точке начала координат, находящейся внутри области интегрирования $\mathcal{V}$. Опыт решения указанной задачи подсказывает, как обойти эту трудность: Надо окружить точку $O(0,0,0)$ маленькой сферой Σ радиуса ε, исключив из области $\mathcal{V}$ внутренность сферы, содержащую особую точку. В остальной области наше векторное поле непрерывно дифференцируемо, а его дивергенция равна нулю:

$$\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{A}(\vec{r})\right) = m\,\left(\vec{\nabla}\cdot\frac{\vec{r}}{r^3}\right) = m\,\left(\vec{\nabla}\frac{1}{r^3}\cdot\vec{r}\right) + \frac{m}{r^3}(\vec{\nabla}\cdot\vec{r}) = 0\,.$$

Таким образом, искомый поток равен $\Pi = -\Pi_\varepsilon$, где Π_ε –поток поля $\vec{A}$ внутрь маленькой сферы. Он легко вычисляется вследствие центральной симметрии как поля так и сферы, и равен $\Pi_\varepsilon = -4\pi\,m$. Отсюда $\Pi = 4\pi\,m$.

Задача 13.5
(4452.1) Найти работу поля

$$\vec{F} = \vec{i}\,\frac{1}{y} + \vec{j}\,\frac{1}{z} + \vec{k}\,\frac{1}{x}$$

вдоль прямолинейного отрезка, соединяющего точки $M(1,1,1)$ *и* $N(2,4,8)$.

Решение 13.5 Работа равна криволинейному интегралу 2-го типа от заданного векторного поля, взятого вдоль данного отрезка, в направлении от M к N:

$$U = \int\limits_{M\to N} (\vec{F}\cdot d\vec{r}) = \int\limits_{M\to N} \frac{dx}{y} + \frac{dy}{z} + \frac{dz}{x}\,.$$

Запишем уравнение отрезка, по которому производится интегрирование, пользуясь общим уравнением прямой, проходящей через любые заданные точки (x_0, y_0, z_0) и (x_1, y_1, z_1):

$$\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0} = \frac{z - z_0}{z_1 - z_0}\,.$$

Подставив сюда координаты начала $-M$ и конца $-N$ нашего отрезка, получим:

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{3} = \frac{z-1}{7} \iff \left\{ \begin{array}{l} y = 3x - 2 \\ z = 7x - 6 \end{array} \right. . \qquad (*)$$

Взяв переменной интегрирования $x \quad (1 \le x \le 2)$ и заметив, что $dy = 3\,dx\,,\ dz = 7\,dx$, найдем:

$$A = \int_1^2 \left(\frac{1}{3x-2} + \frac{3}{7x-6} + \frac{7}{x} \right) dx =$$

$$\left(\frac{1}{3}\ln|3x-2| + \frac{3}{7}\ln|7x-6| + 7\ln|x| \right)\Bigg|_1^2 =$$

$$= \frac{1}{3}\ln 4 + \frac{3}{7}\ln 8 + 7\ln 2 = \left(\frac{2}{3} + \frac{9}{7} + 7 \right)\ln 2 = \frac{188}{21}\ln 2\,.$$

Замечание 13.1 Более "демократический" подход к решению уравнений $(*)$, выражающий равноправие всех координат и динамику движения от точки M к N, получим, приравняв все дроби в $(*)$ к единому параметру t. В итоге будем иметь:

$$\left\{ \begin{array}{l} x = 1 + t \\ y = 1 + 3t \\ z = 1 + 7t \end{array} \right. \qquad (0 \le t \le 1)\,.$$

Дальнейшие выкладки аналогичны приведенным выше и, естественно, дают тот же результат.

Задача 13.6
(4454) Найти циркуляцию вектора $\vec{A} = -\vec{i}\,y + \vec{j}\,x + \vec{k}\,c \quad (c\ \ -)$
а) вдоль окружности $x^2 + y^2 = 1\,,\ \ z = 0\,;$
б) вдоль окружности $(x-2)^2 + y^2 = 1\,,\ \ z = 0\,.$

Решение 13.6 Напомним, циркуляция векторного поля равна криволинейному интегралу 2-го типа вдоль данного контура:

$$\Gamma = \oint\limits_{\mathcal{L}} (\vec{A} \cdot d\vec{r}\,)\,.$$

Вычислим криволинейный интеграл, определяющий величину циркуляции, задав уравнение окружности в параметрической форме. К примеру, в случае a) естественно выбрать следующую параметризацию:

$$\mathcal{L}: \quad x = \cos t\,, \quad y = \sin t\,, \quad z = 0$$
$$(0 \leq t \leq \pi)\,.$$

При этом криволинейный интеграл сводится к определенному интегралу

$$\Gamma = \int_0^{2\pi} [-y(t)dx(t) + x(t)dy(t)] = \int_0^{2\pi} \left[\sin^2 t + \cos^2 t\right] dt = 2\pi\,.$$

Аналогично вычисляется циркуляция и по окружности b).

Проверим результат с помощью формулы Стокса. Она выражает циркуляцию через поверхностный интеграл 2-го типа по любой гладкой поверхности, натянутой на данный контур:

$$\Gamma = \iint\limits_{\mathcal{S}} (\operatorname{rot}\vec{A} \cdot \vec{n}\,) dS\,.$$

В физической интерпретации формула Стокса означает, что циркуляция векторного поля равна потоку его ротора сквозь выбранную поверхность $\mathcal{S}$. Найдем циркуляцию, привлекая формулу Стокса. Для этого вычислим ротор заданного векторного поля:

$$\operatorname{rot}\vec{A} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ -y & x & c \end{vmatrix} = 2\vec{k}\,.$$

Имея ввиду, что ротор поля $\vec{A}$ направлен в сторону орта оси z, возьмем в качестве поверхности круг единичного радиуса, лежащий внутри окружности a). Его вектор нормали равен $\vec{k}$. Следовательно, циркуляция оказывается равной:

$$\Gamma = 2 \iint\limits_{\mathcal{S}} dS = 2\pi\,.$$

Заметим еще, что за направление обхода контура мы неявно выбрали обход против часовой стрелки, если смотреть сверху –со стороны оси z. В противном случае значение циркуляции меняет знак.

Поскольку ротор поля $\vec{A}$ одинаков во всех точках пространства, а контур, вдоль которого ищется циркуляция в случае b), представляет собой ту же окружность в плоскости $z = 0$, лишь сдвинутую вдоль оси x, то и здесь циркуляция равна $\pm 2\pi$, где знак зависит от выбора направления обхода контура.

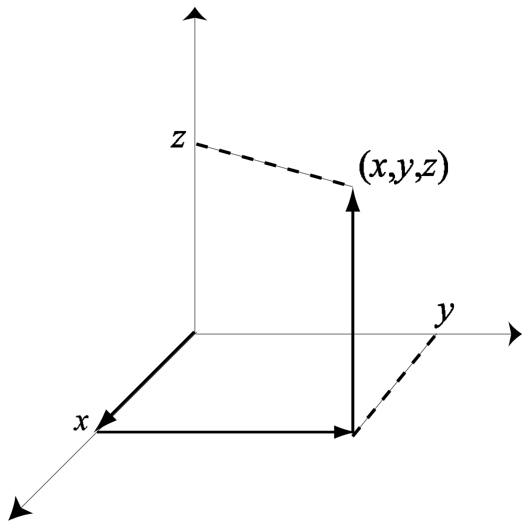

Рис. 13.2: Иллюстрация ко второй части задачи 7. Наиболее удобный при вычислении потенциала кусочно-линейный путь, соединяющий начало координат и произвольную точку пространства с координатами (x, y, z).

Задача 13.7
(4457) Показать, что поле

$$\vec{A} = \vec{i}\, yz\,(2x + y + z) + \vec{j}\, xz\,(x + 2y + z) + \vec{k}\, xy\,(x + y + 2z)$$

–потенциальное и найти потенциал этого поля.

Решение 13.7 Как известно, необходимым и достаточным условием потенциальности векторного поля в некоторой области Ω является равенство нулю ротора поля в этой области. Поэтому вычислим ротор обсуждаемого поля:

$$\operatorname{rot}\vec{A} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} =$$

$$= \vec{i}\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) + \vec{j}\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) + \vec{k}\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right).$$

Здесь введены привычные обозначения компонент векторного поля $\vec{A}$:

$$P = yz(2x + y + z)\,, \quad Q = xz(x + 2y + z)\,, \quad R = xy(x + y + 2z)\,.$$

Вектор ротора будет нулевым, если равны нулю все его компоненты. Подставив компоненты поля $\vec{A}$ в выражения для компонент ротора, убеждаемся, что ротор всюду равен нулю, а значит поле $\vec{A}$ всюду потенциально.

Найдем потенциал (обозначим его $U(x, y, z)$) поля $\vec{A}$, пользуясь тем, что криволинейный интеграл 2-го типа от потенциального поля

$$\int\limits_{(x_0,y_0,z_0)}^{(x,y,z)} (\vec{A}\cdot d\vec{r}) = U(x, y, z) - U(x_0, y_0, z_0)$$

–не зависит от пути интегрирования и равен разности потенциалов конечной и начальной точек. Напомним еще, что потенциал определен с точностью до произвольной постоянной.

Для удобства расчетов соединим начало координат $O(0,0,0)$ с "точкой наблюдения" (x,y,z) отрезками прямых, параллельных осям координат: Сперва пойдем по оси x от $O(0,0,0)$ до точки $O(x,0,0)$, затем повернемся на $\pi/2$ и двинемся вдоль оси y до точки $O(x,y,0)$, а от нее, вдоль оси z, прямо к цели – точке $O(x,y,z)$. В итоге криволинейный интеграл распадется на три интеграла:

$$U(x,y,z) = \int_0^x P(x',0,0)\,dx' + \int_0^y Q(x,y',0)\,dy' + \int_0^z R(z,y,z')\,dz'\,.$$

В нашем случае такой способ действий приводит к следующему результату:

$$U(x,y,z) = \int_0^x 0\,dx + \int_0^y 0\,dy + \int_0^z xy(x+y+2z')dz' = xyz(x+y+z) + C\,.$$

В окончательной формуле мы добавили произвольную постоянную, чтобы учесть все многообразие потенциалов данного векторного поля.

Те, кто предпочитает аналитические методы геометрическим, могут вычислить потенциал другим способом, выписав систему уравнений

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial U}{\partial x} = yz(2x+y+z) \\ \dfrac{\partial U}{\partial y} = xz(x+2y+z) \\ \dfrac{\partial U}{\partial z} = xy(x+y+2z) \end{array}\right. \qquad (*)$$

Интегрируя первое уравнение, получаем:

$$U(x,y,z) = yzx^2 + y^2zx + yz^2x + C(y,z)\,. \qquad (**)$$

Подставив правую часть этого равенства во второе уравнение в $(*)$, придем к уравнению для $C(y,z)$:

$$\frac{\partial C(y,z)}{\partial y} = 0 \quad \Rightarrow \quad C(y,z) = C(z)\,.$$

Наконец из $(*)$ и $(**)$, с учетом последнего равенства, имеем: $C(z) = C = \mathrm{const}$. В итоге выражение $(**)$ сводится к уже знакомому результату.

Задача 13.8
(4458) Найти потенциал гравитационного поля

$$\vec{F} = -\frac{m}{r^3}\,\vec{r},$$

создаваемого массой m, помещенной в начале координат.

Решение 13.8 Убедимся вначале в потенциальности поля, вычислив его ротор:

$$\mathrm{rot}\,\vec{F} = -m[\vec{\nabla} \times \frac{1}{r^3}\,\vec{r}] = m[\vec{r} \times \vec{\nabla}\frac{1}{r^3}] - m\frac{1}{r^3}[\vec{\nabla} \times \vec{r}] = -\frac{3m}{r^5}[\vec{r} \times \vec{r}] + 0 = 0\,.$$

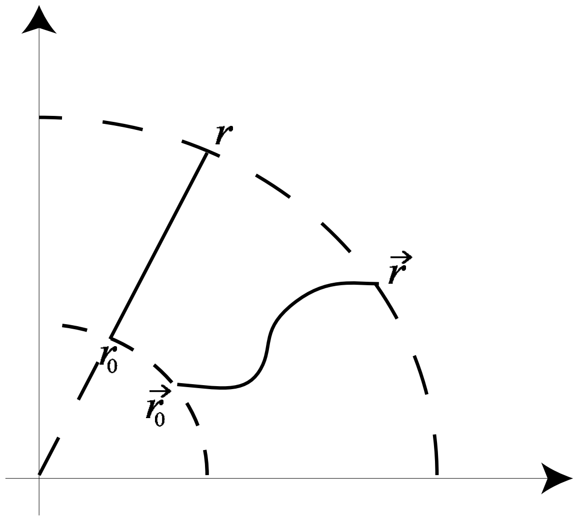

Рис. 13.3: Двумерная иллюстрация замечания к задаче 8. Изображена произвольная кривая, соединяющая точки $\vec{r}_0$ и $\vec{r}$, а также отрезок луча, на который проектируется данная кривая при вычислении потенциала центрально-симметричного векторного поля.

Найдем теперь сам потенциал. При этом нам не надо выбирать, как в предыдущей задаче, специальный путь интегрирования, поскольку для *центрального поля*, к которым относится поле $\vec{F}$, интеграл по любой кривой вычисляется одинаково просто:

$$U(x,y,z) = -m \int\limits_{(x_0,y_0,z_0)}^{(x,y,z)} \frac{(\vec{r}\cdot d\vec{r})}{r^3} = -m \int\limits_{(x_0,y_0,z_0)}^{(x,y,z)} \frac{x\,dx + y\,dy + z\,dz}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} =$$

$$-\frac{m}{2} \int\limits_{(x_0,y_0,z_0)}^{(x,y,z)} \frac{d(x^2+y^2+z^2)}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} = \left.\frac{m}{(x^2+y^2+z^2)^{1/2}}\right|_{(x_0,y_0,z_0)}^{(x,y,z)} .$$

Отсюда окончательный результат:

$$U(\vec{r}) = \frac{m}{r} + C\,,$$

причем физики обычно кладут $C = 0$, считая потенциал на бесконечности равным нулю.

Замечание 13.1 Выкладки становятся более элегантными и геометрически прозрачными, если пользоваться инвариантными, не зависящими от системы координат, обозначениями. Продемонстрируем сказанное на примере произвольного центрального поля

$$\vec{A} = f(r)\,\vec{r}\,,$$

где $f(r)$ –любая сферически-симметричная функция, зависящая только от одного аргумента — расстояния до начала координат. Обозначим за $\vec{r}_0$ начальную точку с координатами (x_0, y_0, z_0) и проведем произвольную гладкую кривую, соединяющую начальную точку с некоторой точкой пространства $\vec{r}$. Криволинейный интеграл по любой выбранной кривой

$$U(\vec{r}\,) = \int\limits_{\vec{r}_0 \rightsquigarrow \vec{r}} f(r)(\vec{r}\cdot d\vec{r}) = \int_{r_0}^{r} f(r) r\, dr$$

–сводится к обычному определенному интегралу вдоль отрезка луча, начало и конец которого удалены от центра на те же расстояния, что и начальная и конечная точки кривой интегрирования.

Решение данной задачи будет еще проще, если вспомнить, что градиент сферически-симметричного скалярного поля $U(r)$ имеет структуру заданного в условии задачи гравитационного поля:

$$\operatorname{grad} U(r) = \frac{U'(r)}{r}\,\vec{r}.$$

Сравнив правую часть этого равенства с гравитационным полем, получим:

$$U'(r) = -\frac{m}{r^2}\,.$$

Отсюда

$$U(r) = \frac{m}{r} + C\,.$$

13.3 Домашнее задание

4444, 4445, 4445,1, 4445,2, 4455.1

Задача 13.9
(4444) Найти поток вектора $\vec{A} = \vec{i}\,x^2 + \vec{j}\,y^2 + \vec{k}\,z^2$ через положительный октант сферы

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1\,, \quad x \geq 0\,, \quad y \geq 0\,, \quad z \geq 0\,.$$

Решение 13.9 Применим формулу Гаусса-Остроградского, для чего дополним октант сферы до замкнутой поверхности лежащими в координатных плоскостях четвертями кругов, с центрами в начале координат. Так как поток заданного поля через координатные плоскости равен нулю, то поток сквозь выбранную замкнутую поверхность равен интересующему нас потоку через положительный октант сферы. Из формулы Гаусса-Остроградского имеем

$$\Pi = \iiint\limits_{\mathcal{V}} \operatorname{div}\vec{A}\, dV = 2\iiint\limits_{\mathcal{V}} (x+y+z)\, dV\,,$$

где $\mathcal{V}$ –область внутри положительного октанта указанной в условии задачи сферы. Из симметрии области интегрирования и подынтегрального выражения ясно, что вклад от каждого слагаемого подынтегрального выражения одинаков. Поэтому можно рассчитать искомый поток по формуле:

$$\Pi = 6\iiint\limits_{\mathcal{V}} x\, dV\,.$$

Перейдем в интеграле к сферическим координатам

$$\left\{\begin{array}{l} x = r\cos\theta\cos\varphi\,, \\ y = r\cos\theta\sin\varphi\,, \\ z = r\sin\theta\,. \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{l} 0 \le \varphi \le \pi/2\,, \\ 0 \le \theta \le \pi/2\,, \\ 0 \le r \le 1\,. \end{array}\right.$$

Вспомнив еще, что якобиан перехода от декартовых к сферическим координатам равен $J = r^2\cos\theta$, получим:

$$\Pi = 6\int_0^{\pi/2}\cos^2\theta\,d\theta\int_0^{\pi/2}\cos\varphi\,d\varphi\int_0^1 r^3\,dr = 6\cdot\frac{\pi}{4}\cdot 1\cdot\frac{1}{4} = \frac{3\pi}{8}\,.$$

Задача 13.10
Найти поток вектора $\vec{A} = \vec{i}\,y + \vec{j}\,z + \vec{k}\,x$ через поверхность пирамиды, ограниченной плоскостями

$$x = 0\,,\quad y = 0\,,\quad z = 0\,,\quad x + y + z = a\quad (a > 0)\,.$$

Проверить результат, используя формулу Гаусса-Остроградского.

Решение 13.10 Естественно разбить соответствующий поверхностный интеграл 2-го типа на четыре, по числу плоскостей, ограничивающих пирамиду. Иными словами, представим поток в виде суммы:

$$\Pi = \iint\limits_{\mathcal{S}_1}(\vec{A}\cdot -\vec{k}\,)\,dxdy + \iint\limits_{\mathcal{S}_2}(\vec{A}\cdot -\vec{j}\,)\,dxdz + \iint\limits_{\mathcal{S}_3}(\vec{A}\cdot -\vec{i}\,)\,dydz + \iint\limits_{\mathcal{S}_4}(\vec{A}\cdot\vec{n}\,)\,dS\,.$$

Здесь первые три слагаемых равны потокам через треугольники, лежащие в координатных плоскостях, а $\mathcal{S}_4$ –расположенный в положительном октанте кусок плоскости $x + y + z = a$. Сообразив, что потоки через треугольники в разных координатных плоскостях одинаковы, заменим их утроенным потоком сквозь плоскость (x, y). Кроме того, сведем последний интеграл к двойному –по проекции поверхности $\mathcal{S}_4$ на ту же координатную плоскость:

$$\Pi = -3\iint\limits_{\mathcal{S}_1} x\,dxdy + \iint\limits_{\mathcal{S}_1}(\vec{A},\,\vec{r}_x,\,\vec{r}_y)\,dxdy\,.$$

Сосчитаем каждый из входящих сюда интегралов по отдельности. Первый из них равен:

$$3\iint\limits_{\mathcal{S}_1} x\,dxdy = \int_0^a x\,dx\int_0^{a-x} dy = \int_0^a (ax - x^2)\,dx = 3\left(\frac{ax^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^a = \frac{a^3}{2}\,.$$

Чтобы найти оставшийся интеграл, выпишем явные выражения векторного поля и радиус-вектора как функции x и y:

$$\vec{A} = \vec{i}\,y + \vec{j}\,(a - x - y) + \vec{k}\,x\,,\quad \vec{r} = \vec{i}\,x + \vec{j}\,y + \vec{k}\,(a - x - y)\,.$$

Отсюда видно, что смешанное произведение векторов $\vec{A}$, $\vec{r}_x$ и $\vec{r}_y$ равно

$$(\vec{a},\,\vec{r}_x,\,\vec{r}_y) = \begin{vmatrix} y & a - x - y & x \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = x + (a - x - y) + y = a\,.$$

Следовательно
$$\iint\limits_{\mathcal{S}_1} (\vec{A},\, \vec{r}_x,\, \vec{r}_y)\, dxdy = a\, \frac{a^2}{2} = \frac{a^3}{2}\,.$$
Таким образом, полный поток указанного векторного поля через поверхность пирамиды равен нулю:
$$\Pi = -\frac{a^3}{2} + \frac{a^3}{2} = 0\,.$$

Замечание 13.1 Единственная приобретенная в процессе решения полезная информация состоит, пожалуй, в том, что мы научились выполнять, не допуская ошибок, довольно длинные цепочки вычислений. Что касается собственно ответа, то он мгновенно следует из формулы Гаусса-Остроградского и из того факта, что дивергенция интегрируемого поля тождественно равна нулю.

Задача 13.11
(4445.1) Найти поток вектора
$$\vec{F} = \vec{i}\, x^3 + \vec{j}\, y^3 + \vec{k}\, z^3$$
через сферу $x^2 + y^2 + z^2 = x$.

Решение 13.11 С помощью формулы Гаусса-Остроградского искомый поток выражается через объемный интеграл:
$$\Pi = 3 \iiint\limits_{\mathcal{V}} (x^2 + y^2 + z^2)\, dV\,.$$
Интегрирование ведется по внутренности сферы радиуса $R = 1/2$ с центром в точке $(1/2, 0, 0)$. Чтобы избежать громоздких выкладок, перейдем к новой — смещенной — декартовой системе координат с началом в центре шара, по которому ведется интегрирование:
$$u = x - \frac{1}{2}\,, \quad y = y\,, \quad z = z\,.$$
В этой системе координат объемный интеграл примет вид:
$$\Pi = 3 \iiint\limits_{\mathcal{V}} r^2\, dV + 3 \iiint\limits_{\mathcal{V}} u\, dV + \frac{3}{4} \iiint\limits_{\mathcal{V}} dV\,.$$
Здесь обозначено: $r^2 = u^2 + y^2 + z^2$. Очевидно, последний интеграл равен объему шара
$$\frac{3}{4} \iiint\limits_{\mathcal{V}} dV = \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{3} \pi\, R^3 = \frac{\pi}{8}\,,$$
а средний равен нулю. Следовательно
$$\Pi = 3 \iiint\limits_{\mathcal{V}} r^2\, dV + \frac{\pi}{8}\,.$$

Оставшийся интеграл вычислим, перейдя к сферической системе координат. При этом интеграл распадается на произведение трех интегралов. Два из них — по угловым переменным — в совокупности дают полный телесный угол $\Omega = 4\pi$, и интегралу по радиальной переменной. С учетом сказанного получаем:

$$\Pi = 12\pi \int_0^{1/2} r^4\, dr + \frac{\pi}{8} = \pi \left(\frac{12}{5 \cdot 32} + \frac{1}{8} \right) = \frac{\pi}{8} \left(\frac{3}{5} + 1 \right) = \frac{\pi}{5}\,.$$

Задача 13.12
(4452.2) Найти работу поля

$$\vec{F} = \vec{i}\, e^{y-z} + \vec{j}\, e^{z-x} + \vec{k}\, e^{x-y}$$

вдоль прямолинейного отрезка между точками $O(0,0,0)$ *и* $M(1,3,5)$.

Решение 13.12 Работа U силового поля $\vec{F}(\vec{r}\,)$ вдоль указанного пути $\mathcal{L}$ равна криволинейному интегралу 2-го типа

$$\int\limits_{\mathcal{L}} (\vec{F} \cdot d\vec{r}) = \int\limits_{\mathcal{L}} e^{y-z} dx + e^{z-x} dy + e^{x-y} dz\,.$$

Чтобы вычислить его, выпишем уравнение отрезка:

$$\frac{x}{1} = \frac{y}{3} = \frac{z}{5} \iff \left\{ \begin{array}{l} y = 3x \\ z = 5x \end{array} \right. \quad (0 \le x \le 1)\,.$$

Взяв в качестве переменной интегрирования x и пользуясь приведенными уравнениями пути интегрирования, будем иметь:

$$U = \int_0^1 \left(e^{-2x} + 3e^{-4x} + 5e^{-2x} \right) dx = -\frac{6}{2} e^{-2x} + \frac{3}{4} e^{4x} \Big|_0^1 =$$
$$-3e^{-2} + \frac{3}{4} e^4 + 3 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4} \left(3e^4 + 9 - 12e^{-2} \right)\,.$$

Задача 13.13
(4455.1) Дано векторное поле

$$\vec{A} = \vec{i}\, \frac{y}{\sqrt{z}} - \vec{j}\, \frac{x}{\sqrt{z}} + \vec{k}\, \sqrt{xy}\,.$$

Вычислив $\operatorname{rot} \vec{A}$ *в точке* $M(1,1,1)$, *приближенно найти циркуляцию* Γ *поля вдоль бесконечно малой окружности*

$$\left\{ \begin{array}{c} (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = \varepsilon^2\,, \\ (x-1)\cos\alpha + (y-1)\cos\beta + (z-1)\cos\cos\gamma = 0\,, \end{array} \right.$$

где $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$.

Решение 13.13 При оценке циркуляции по маленьким контурам, в пределах которых векторное поле меняется слабо, удобно применять теорему Стокса

$$\Gamma = \iint\limits_{\mathcal{S}} (\operatorname{rot} \vec{A} \cdot \vec{n}\,)\, dS\,,$$

сводящую циркуляцию к поверхностному интегралу 2-го типа по маленькой площадке $\mathcal{S}$, а затем, по теореме о среднем, приближенно заменить поверхностный интеграл площадью площадки, умноженной на значение $(\operatorname{rot}\vec{A}\cdot\vec{n}\,)$ в любой ее точке M.

Реализуем описанную программу действий. Для этого вычислим ротор заданного векторного поля:

$$\operatorname{rot}\vec{A}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ \dfrac{y}{\sqrt{z}} & -\dfrac{x}{\sqrt{z}} & \sqrt{xy} \end{vmatrix}=$$

$$=\vec{i}\left(\frac{x}{2\sqrt{yx}}-\frac{x}{2z\sqrt{z}}\right)+\vec{j}\left(-\frac{x}{2z\sqrt{z}}-\frac{y}{2\sqrt{yx}}\right)+\vec{k}\left(-\frac{2}{\sqrt{z}}\right).$$

Отсюда в частности следует, что в центре $M(1,1,1)$ кружочка, ограниченного заданной в условии задачи окружностью,

$$\operatorname{rot}\vec{A}=-\vec{j}-2\vec{k}\,.$$

Осталось умножить этот вектор скалярно на вектор нормали к кружочку

$$\vec{n}=\vec{i}\,\cos\alpha+\vec{j}\,\cos\beta+\vec{k}\,\cos\gamma\,,$$

и на его площадь $\pi\,\varepsilon^2$, чтобы найти искомое приближенное значение циркуляции:

$$\Gamma\cong-(\cos\beta+2\cos\gamma)\pi\,\varepsilon^2\,.$$