$\vec C = \vec B + \text{grad}\,\varphi$

Т. доказана.

Т. 5.7. Для того, чтобы непрерыв. диф-мое вект. поле было соленоидальным ⇄ чтобы дивергенция эт. поля равнялась 0 всюду в обл. Ω, т.е.

$\text{div}\,\vec A = 0$.

Необход-сть. Пусть $\vec A$ – соленоид. поле: $\vec A = \text{rot}\,\vec B$.

$\text{div}\,\vec A = \text{div}(\text{rot}\,\vec B) = (\nabla[\nabla\times\vec B]) = 0$, т.к. 2 одинаковых вектора.

Т. 5.8. Поток соленоидал. поля через любую кусоч.-гладк. замкнутую пов-сть S равен 0.

Д-во. $\oiint_S (\vec A\vec n)\,dS = \iiint_T \underbrace{\text{div}\vec A}_{=0}\,dT = 0.$

Т. 5.9. Поток соленоидал. поля через любое сечение вектор. трубки не меняется.

Д-во.

$$\oiint_S (\vec A\vec n)\,dS = 0 = \iint_{S_2}(\vec A,\vec n)\,dS - \iint_{S_1}(\vec A,\vec n)\,dS$$

$$\iint_{S_2}(\vec A,\vec n)\,dS = \iint_{S_1}(\vec A,\vec n)\,dS$$

$$\iint_{S_3}(\vec A\vec n)\,dS = 0, \text{ т.к. } \vec n\perp\vec A.$$

5.12. Лапласово векторное поле. Гармонические поля.

О.5.17. Вект. поле $\vec A: (\Omega\subset R^3)\to R^3$ наз-ют лапласовым, если для него одновр. вып-ся 2 соотн-я: $\text{rot}\,\vec A = 0$ и $\text{div}\,\vec A = 0$.

$\vec A = \text{grad}\,u$

$\text{div}(\text{grad}\,u) = 0$

$(\nabla, \nabla u) = 0 = (\nabla\cdot\nabla)u = \nabla^2 u = 0$ – ур-ие Лапласа.

$$\nabla^2 u = \Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0.$$

5.13. Основная теорема вект. анализа.

Т. 5.11. Любое непрерыв. диф-мое вект. поле $\vec A: (\Omega\subset R^3)\to R$ можно представить в виде суммы 2-х полей $\vec A = \vec B + \vec C$, где $\vec B$ – потенц., а C – соленоид. поля.

5.14. Дифференциальные операции 2-го порядка.

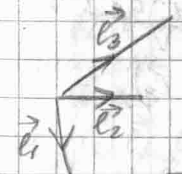
	grad u	div $\vec A$	rot $\vec A$
grad	×	grad(div $\vec A$)	×
div	div(grad u)	×	div(rot $\vec A$) = 0
rot	rot(grad u) 0	×	rot(rot $\vec A$)

$$\text{grad}\,\text{div}\,\vec A = \nabla(\nabla,\vec A) = \nabla^2\vec A + [\nabla[\nabla\vec A]] = \Delta\vec A + \text{rot}\,\text{rot}\,\vec A$$

$$\text{rot}\,\text{grad}\,u = [\nabla\times\nabla]u = 0$$

$$\text{div}\,\text{rot}\,\vec A = (\nabla[\nabla\vec A]) = 0$$

Глава 6. Криволинейные координаты.



– косоугол. с-ма коорд-т.

– кривол. с-ма коорд-т.

6.1. Основной и взаимный базисы.

$\vec e_1, \vec e_2, \vec e_3, \dots, \vec e_n$ – базис. векторы нек-рой декарт. с-мы к-т в n-мерном пр-ве.

$$(\vec e_i\cdot\vec e_k) = \delta_{ik} = \begin{cases}1, & \text{если } i=k,\\ 0, & \text{если } i\ne k.\end{cases}$$

$$\vec A = \sum_{i=1}^{n} A_i e_i$$

A_i – коорд-ты (компоненты вектора $\vec A$)

$(\vec A\cdot\vec e_k) = A_k(\vec e_k\cdot\vec e_k) = A_k$ (проекция в-ра на k-ю ось).

О. 6.1 Пусть векторы $\vec{e}_i$ $(i=1,2,\dots,n)$ обр-ют базис в пр-ве $\mathbb{R}^n$ (и $\vec{A}$ - нек-рый вектор из $\mathbb{R}^n$). Назовем этот базис основной. Будем говорить, что векторы $\vec{e}^k$ $(k=1,2,\dots,n)$ обр-ют взаим. базис для базиса $\vec{e}_i$, если

$$(\vec{e}_i\,\vec{e}^k) = \delta_{ik} = \begin{cases} 0, & \text{если } i \neq k \\ 1, & \text{если } i = k \end{cases}$$

О.6.2. Коорд-ты вектора $\vec{A}$ в основном базисе $\vec{e}_i$ наз-ся контравариантными коорд-тами и обозначаются A^i. Коорд-ты вектора $\vec{A}$ во взаим. базисе $\vec{e}^k$ наз-ся ковариантными и обозн-ся A_k

$\vec{A} = \sum_{i=1}^{n} A^i \vec{e}_i$ - в основ. базисе. $\quad A^i = (\vec{A}\cdot\vec{e}^i)$

$\vec{A} = \sum_{k=1}^{n} A_k \vec{e}^k$ - во взаим. базисе.

$A_k = (\vec{A}\cdot\vec{e}_k)$

Т. 6.1 Пусть $\vec{e}_i$ $i=1,2,3$ - базис в $\mathbb{R}^3$. Назовем его основным. Тогда векторы $\vec{e}^k$ равные

$$\vec{e}^1 = \frac{[\vec{e}_2, \vec{e}_3]}{V}, \quad \vec{e}^2 = \frac{[\vec{e}_3 \times \vec{e}_1]}{V}, \quad \vec{e}^3 = \frac{[\vec{e}_1 \times \vec{e}_2]}{V}$$

образуют взаим. базис, где $V = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3) = (\vec{e}_1 \cdot [\vec{e}_2 \times \vec{e}_3])$. (усл-е $V \neq 0$)

Д-во.

$$(\vec{e}_i, \vec{e}^k) = \delta_i^k$$

$$(\vec{e}_1, \vec{e}^1) = \left(\vec{e}_1, \frac{[\vec{e}_2 \times \vec{e}_3]}{V}\right) = \frac{1}{V}(\vec{e}_1 \cdot [\vec{e}_2\,\vec{e}_3]) = \frac{V}{V} = 1.$$

$$(\vec{e}_1, \vec{e}^2) = \left(\vec{e}_1, \frac{[\vec{e}_3 \times \vec{e}_1]}{V}\right) = 0.$$

$$(\vec{e}_1, \vec{e}^3) = \frac{1}{V}(\vec{e}_1\,[\vec{e}_1, \vec{e}_2]) = 0.$$

О. 6.3. Пусть x, y, z - прямоуг. декартовы к-ты в $\mathbb{R}^3$. Упорядоч. тройка чисел q_1, q_2, q_3 наз-ся криволин. к-тами в $\mathbb{R}^3$ если каждой тройке q_1, q_2, q_3 ставится в соответствие точка с к-тами (x, y, z) с помощью ф-ций:

$$x = x(q_1, q_2, q_3)$$
$$y = y(q_1, q_2, q_3)$$
$$z = z(q_1, q_2, q_3).$$

Эти ф-ции удовл. усл-ям:

1. Ф-ции $x(q_1,q_2,q_3)$, $y(q_1,q_2,q_3)$, $z(q_1,q_2,q_3)$ дважды непрерывно диф-мы.
2. Якобиан $J = \dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(q_1,q_2,q_3)} \neq 0$. Задается взаимно однозн. соотв-ие.

Можно найти обратные ф-ции $q_1 = q_1(x,y,z)$

$q_2 = q_2(x,y,z)$

$q_3 = q_3(x,y,z)$.

Локальный базис (лок. тройка базисных векторов). Глав. св-во баз. в-ров - некомпланарность.

Т. 6.2. Пусть в пр-ве $\mathbb{R}^3$ заданы криволин. к-ты q_1, q_2, q_3, а радиус-вектор точки $M(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ равен $\vec{r} = \vec{i}x(q_1,q_2,q_3) + \vec{j}y(q_1,q_2,q_3) + \vec{k}z(q_1,q_2,q_3)$. Тогда

1) С-ма векторов $\vec{e}_i = \dfrac{\partial \vec{r}}{\partial q_i}$ образует лок. базис в дан. точке.

2) С-ма векторов $\vec{e}^k = \nabla q_k = \operatorname{grad} q_k$ образует лок. взаимн. базис.

Д-во.

Если $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3) = (\vec{e}_1\,[\vec{e}_2, \vec{e}_3])$ не равно 0, то векторы $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ и $\vec{e}_3$ некомпланарны.

$$(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial q_1} & \frac{\partial y}{\partial q_1} & \frac{\partial z}{\partial q_1} \\ \frac{\partial x}{\partial q_2} & \frac{\partial y}{\partial q_2} & \frac{\partial z}{\partial q_2} \\ \frac{\partial x}{\partial q_3} & \frac{\partial y}{\partial q_3} & \frac{\partial z}{\partial q_3} \end{vmatrix} = J \neq 0.$$

2. $(\vec{e}^k \cdot \vec{e}_i) = \delta_{ik}$ - призн. взаим. базиса.

$$(\vec{e}^k \cdot \vec{e}_i) = \frac{\partial q_k}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial q_i} + \frac{\partial q_k}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial q_i} + \frac{\partial q_k}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial q_i} = \frac{\partial q_k}{\partial q_i} = \delta_{ik}.$$

О. 6.4. Поверхность $\begin{cases} x = x(q_1, q_2, c_3) \\ y = y(q_1, q_2, c_3) \\ z = z(q_1, q_2, c_3) \end{cases}$, где $c_3 = \text{const}$.

наз-ся координатной пов-стью $q_3 = c_3$. Аналогично опред-ся коорд. пов-сти $q_1 = c_1$, $q_2 = c_2$.

Кривая
$$(*)\quad \begin{cases} x = x(q_1, c_2, c_3) \\ y = y(q_1, c_2, c_3) \\ z = z(q_1, c_2, c_3) \end{cases}$$
наз-ся координатн. линией q_1.

Аналогично опред-ся коорд. линии q_2 и q_3.

$(*) = \vec{r} = \vec{r}(q_1, c_2, c_3)$

$$\vec{e}_1 = \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_1}$$

Геом. смысл базис. векторов: касательные к коорд. линиям.

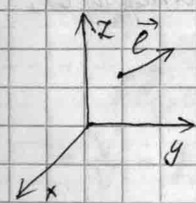
6.3 Ортогональные криволинейные координаты.

О. 6.5. Сист. крив. коор-т наз-ся ортогональной, если $\forall$ её локал. базис ортогонален ($(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ - ортогон.)

Т. 6.3. Для того, чтобы криволин. к-ты, заданные рав-вами: $x = x(q_1, q_2, q_3)$, $y = y(q_1, q_2, q_3)$, $z = z(q_1, q_2, q_3)$ были ортогональны $\Leftrightarrow$ чтобы выполнялись след. усл-е: $\frac{\partial x}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial x}{\partial q_j} + \frac{\partial y}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial y}{\partial q_j} + \frac{\partial z}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial z}{\partial q_j} = 0$, $(i \neq j)$.

Д-во.

$$(\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j) = \frac{\partial x}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial x}{\partial q_j} + \frac{\partial y}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial y}{\partial q_j} + \frac{\partial z}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial z}{\partial q_j} = 0 \Rightarrow \vec{e}_i \perp \vec{e}_j$$



$$(dl)^2 = (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2$$

Выразим dl через dq_1, dq_2, dq_3.

$$dx = \frac{\partial x}{\partial q_1} dq_1 + \dots$$

$$(dl)^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial q_1} dq_1 + \frac{\partial x}{\partial q_2} dq_2 + \frac{\partial x}{\partial q_3} dq_3\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_1} dq_1 + \frac{\partial y}{\partial q_2} dq_2 + \frac{\partial y}{\partial q_3} dq_3\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_1} dq_1 + \frac{\partial z}{\partial q_2} dq_2 + \frac{\partial z}{\partial q_3} dq_3\right)^2 =$$

$$= \sum_{i,j=1}^{3} \left(\frac{\partial x}{\partial q_i} \frac{\partial x}{\partial q_j} + \frac{\partial y}{\partial q_i} \frac{\partial y}{\partial q_j} + \frac{\partial z}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial z}{\partial q_j}\right) dq_i\, dq_j =$$

$$= \sum_{i=1}^{3} \left[\left(\frac{\partial x}{\partial q_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_i}\right)^2\right] (dq_i)^2$$

$$H_i = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_i}\right)^2}$$ - параметры, коэф-ты Ламэ.

$$H_i = \left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i}\right| = |\vec{e}_i|$$

$$(dl)^2 = H_1^2 dq_1^2 + H_2^2 dq_2^2 + H_3^2 dq_3^2.$$

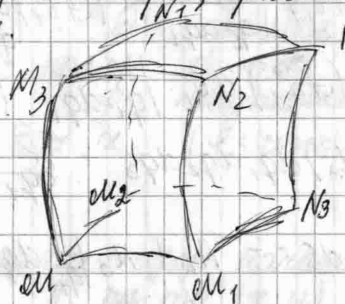
Геом. смысл к-тов Ламэ.

dl_1 - бес. мал. вектор, касат. к коорд. линии

$dl_1 = H_1 dq_1$

H_1 - к-т пересчета от единич. длины к крив. к-там.

$dl_i = H_i dq_i$ - длина отр., ориентир. вдоль i-той коорд. линии.



$d\sigma_1$ - площадь пов-сти, лежащ. в коорд. поверхности $q_1 = \text{const}$.

$d\sigma_1 = H_2 H_3\, dq_2\, dq_3 = dl_2\, dl_3$

$d\sigma_2$ - площадь грани параллелепипеда, лежащ. в коорд. пов-сти $q_2 = \text{const}$.

$d\sigma_2 = H_3 H_1\, dq_3\, dq_1$

$d\sigma_3 = H_1 H_2\, dq_1\, dq_2$

$dV = H_1 H_2 H_3\, dq_1\, dq_2\, dq_3$

6.4. Дифференц. операции теории поля в ортогонал. лин. к-тах.

Ортонормируем в-ры:

$$\vec{i}_1 = \frac{\vec{e}_1}{H_1}, \quad \vec{i}_2 = \frac{\vec{e}_2}{H_2}, \quad \vec{i}_3 = \frac{\vec{e}_3}{H_3}$$

Скаляр поле $u(q_1, q_2, q_3)$

Вект. поле $\vec{A} = A_1(q_1, q_2, q_3)\vec{i}_1 + A_2(q_1, q_2, q_3)\vec{i}_2 + A_3(q_1, q_2, q_3)\vec{i}_3$.

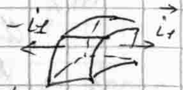
$\operatorname{grad} u = a_1\vec{i}_1 + a_2\vec{i}_2 + a_3\vec{i}_3$

$a_k = (\operatorname{grad} u, i_k) = \frac{1}{H_k}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial q_k} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial q_k} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial q_k}\right) =$

$= \frac{1}{H_k}\frac{\partial u}{\partial q_k} \Rightarrow a_k = \frac{1}{H_k}\frac{\partial u}{\partial q_k}$

$\operatorname{grad} u = \frac{1}{H_1}\frac{\partial u}{\partial q_1}\vec{i}_1 + \frac{1}{H_2}\frac{\partial u}{\partial q_2}\vec{i}_2 + \frac{1}{H_3}\frac{\partial u}{\partial q_3}\vec{i}_3$

$\operatorname{div}\vec{A} = \lim_{T\to M}\frac{1}{V}\oiint_T (\vec{A},\vec{n})\,dS$



В кач-ве обл. T возьмем параллелепипед

$dV = H_1H_2H_3\,dq_1dq_2dq_3$

Поток через эти грани

$\left(\Pi = (\vec{A}\vec{i}_1)\Big|_{q_1+dq_1} d\sigma_1 - (\vec{A}\vec{i}_1)\Big|_{q_1} d\sigma_1\right)$

$\Pi = (\vec{A}\vec{i}_1)\,d\sigma_1\Big|_{q_1+dq_1} - (\vec{A}\vec{i}_1)\Big|_{q_1} d\sigma_1 =$

$= \frac{\partial}{\partial q_1}(A_1H_2H_3)\,dq_1dq_2dq_3 \quad \cancel{\frac{\partial}{\partial q_1}(A_1H}$

$\oiint (\vec{A}\vec{n})\,dS = -A_1H_2H_3\Big|_{q_1} dq_2dq_3 + A_1H_2H_3\Big|_{q_1+dq_1} dq_2dq_3$

$A_1H_2H_3\Big|_{q_1+dq_1} = A_1H_2H_3\Big|_{q_1} + \frac{\partial}{\partial q_1}(AH_2H_3)\Big|_{q_1} dq_1 + \dots$

(по Тейлору)

$\Pi = \frac{1}{H_1H_2H_3}\frac{\partial}{\partial q_1}(A_1H_2H_3)\,dV$

$dS_1 = \frac{\partial}{\partial q_1}(A_1H_2H_3)\,dq_1dq_2dq_3$

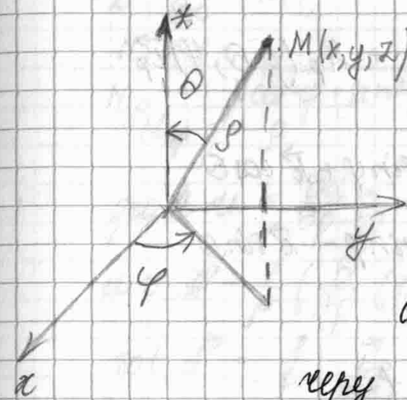
Аналогично получим dS_2 и dS_3

$\frac{1}{V}\iint(\vec{n}\vec{A})\,dS = \frac{dS_1+dS_2+dS_3}{V} = \frac{1}{H_1H_2H_3}\left(\frac{\partial}{\partial q_1}(A_1H_2H_3) + \frac{\partial}{\partial q_2}(A_2H_1H_3) + \frac{\partial}{\partial q_3}(A_3H_1H_2)\right) = \operatorname{div}\vec{A}$

$$\operatorname{rot}\vec{A} = \frac{1}{H_1H_2H_3}\begin{vmatrix} H_1\vec{i}_1 & H_2\vec{i}_2 & H_3\vec{i}_3 \\ \frac{\partial}{\partial q_1} & \frac{\partial}{\partial q_2} & \frac{\partial}{\partial q_3} \\ H_1A_1 & H_2A_2 & H_3A_3 \end{vmatrix}$$

$$\Delta U = \nabla^2 U = \operatorname{div}\operatorname{grad} U = \frac{1}{H_1H_2H_3}\left(\frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{H_2H_3}{H_1}\frac{\partial U}{\partial q_1}\right) + \frac{\partial}{\partial q_2}\left(\frac{H_1H_3}{H_2}\frac{\partial U}{\partial q_2}\right) + \frac{\partial}{\partial q_3}\left(\frac{H_1H_2}{H_3}\frac{\partial U}{\partial q_3}\right)\right)$$

6.5. Сферич. полярные к-ты.



$0 < \rho < \infty$
$0 \le \theta \le \pi$
$0 \le \varphi < 2\pi$

Координат. пов-сти.

ρ – концентрич. сферы. ($\rho = const$)

θ – прямые круговые конусы с полярн. осью z ($\theta = const.$)

φ – полуплоскости, проходящ. через ось z. ($\varphi = const.$)

Коорд. линии.

ρ – лучи, проходящ. через начало координат.

φ – окружности $\parallel$ пл-ти (x,y)

θ – полуокр-сти, лежащ. в полуплоскостях, проходящих через полярн. ось z (меридианы).

$\vec{r}(\rho,\theta,\varphi) =$

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi\sin\theta \\ y = \rho\sin\theta\sin\varphi \\ z = \rho\cos\theta \end{cases}$$

$\vec{r}(\rho,\theta,\varphi) = \vec{i}\rho\sin\theta\cos\varphi + \vec{j}\rho\sin\theta\sin\varphi + \vec{k}\rho\cos\theta$

$\vec{e}_\rho = \frac{\partial\vec{r}}{\partial\rho} = \vec{i}\sin\theta\cos\varphi + \vec{j}\cancel{\rho}\sin\theta\sin\varphi + \vec{k}\cos\theta$

$\vec{e}_\theta = \frac{\partial\vec{r}}{\partial\theta} = \vec{i}\rho\cos\theta\cos\varphi + \vec{j}\rho\cos\theta\,\cancel{\cos}\sin\varphi - \vec{k}\rho\sin\theta$

$\vec{e}_\varphi = \frac{\partial\vec{r}}{\partial\varphi} = -\vec{i}\rho\sin\theta\sin\varphi + \vec{j}\rho\sin\theta\cos\varphi.$

$(\vec{e}_\rho\,\vec{e}_\theta) = (\vec{e}_\rho\cdot\vec{e}_\varphi) = (\vec{e}_\theta\cdot\vec{e}_\varphi) = 0.$

$$H_1 = H_\rho = \sqrt{\sin^2\Theta\cos^2\varphi + \sin^2\Theta\sin^2\varphi + \cos^2\Theta} = 1$$

$$H_\Theta = \dots = \rho$$

$$H_\varphi = \dots = \rho\sin\Theta$$

$$dl_k = H_k\, dq_k$$

$$H_k = \frac{dl_k}{dq_k}$$

$$\vec{A} = A_\rho(\rho,\Theta,\varphi)\vec{i}_\rho + A_\Theta(\rho,\Theta,\varphi)\vec{i}_\Theta + A_\varphi(\rho,\Theta,\varphi)\vec{i}_\varphi$$

$$u = u(\rho,\Theta,\varphi)$$

$$\vec{i}_\rho = \frac{\vec{e}_\rho}{H_\rho} = \vec{i}\sin\Theta\cos\varphi + \vec{j}\sin\Theta\sin\varphi + \vec{k}\cos\Theta$$

$$\vec{i}_\Theta = \frac{\vec{e}_\Theta}{H_\Theta} = \vec{i}\cos\Theta\cos\varphi + \vec{j}\cos\Theta\sin\varphi - \vec{k}\sin\Theta$$

$$\vec{i}_\varphi = \frac{\vec{e}_\varphi}{H_\varphi} = -i\sin\Theta + \vec{j}\cos\Theta$$

$$\operatorname{grad} u = \vec{i}_\rho\frac{\partial u}{\partial\rho} + \vec{i}_\Theta\frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial u}{\partial\Theta} + \vec{i}_\varphi\frac{1}{\rho\sin\Theta}$$

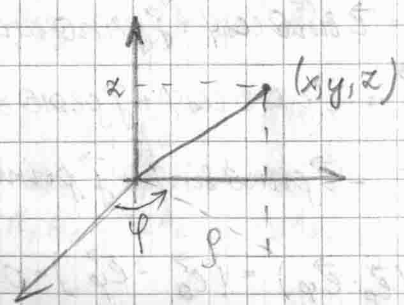
$$\operatorname{div}\vec{A} = \frac{1}{\rho^2\sin\Theta}\left(\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho^2\sin\Theta A_\rho) + \frac{\partial}{\partial\Theta}(\rho\sin\Theta) + \frac{\partial}{\partial\varphi}(\rho A_\varphi)\right)$$

$$\operatorname{rot}\vec{A} = \frac{1}{\rho^2\sin\Theta}\begin{vmatrix} \vec{i}_\rho & \rho\vec{i}_\Theta & \rho\sin\Theta\,\vec{i}_\varphi \\ \partial/\partial\rho & \partial/\partial\Theta & \partial/\partial\varphi \\ A_\rho & \rho A_\Theta & \rho\sin\Theta\, A_\varphi \end{vmatrix};$$

$$\Delta u = \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho^2\frac{\partial u}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2\sin^2\Theta}\cdot\frac{\partial}{\partial\Theta}\left(\sin\Theta\frac{\partial u}{\partial\Theta}\right) + $$
$$+ \frac{1}{\rho^2\sin^2\Theta}\;\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}$$

Цилиндрич. к-ты.

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \\ z = z \end{cases}$$



$$\vec{r}(\rho,\varphi,z) = \vec{i}\rho\cos\varphi + \vec{j}\rho\sin\varphi + \vec{k}z$$

$$\vec{e}_\rho = \frac{\partial\vec{r}}{\partial\rho} = \vec{i}\cos\varphi + \vec{j}\sin\varphi$$

$$\vec{e}_\varphi = \frac{\partial\vec{r}}{\partial\varphi} = -\vec{i}\rho\sin\varphi + \vec{j}\rho\cos\varphi$$

$$\vec{e}_z = \frac{\partial\vec{r}}{\partial z} = \vec{k}$$

$$H_z = 1$$

$$H_\rho = \sqrt{\cos^2\varphi + \sin^2\varphi} = 1$$

$$H_\varphi = \rho$$

$$\operatorname{grad} u = \frac{\partial u}{\partial\rho}\vec{i}_\rho + \frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial\varphi}\vec{i} + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{i}_z$$

$$\operatorname{div}\vec{A} = \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho A_\rho) + \frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi} + \frac{\partial}{\partial z}(\rho A_z)\right)$$

$$\operatorname{rot}\vec{A} = \frac{1}{\rho}\begin{vmatrix} \vec{i}_\rho & \rho\vec{i}_\varphi & \vec{i}_z \\ \partial/\partial\rho & \partial/\partial\varphi & \partial/\partial z \\ A_\rho & \rho A_\varphi & A_z \end{vmatrix}.$$