Билет 1

$I=\iint_S (x^2+y^2)dS$, $\sqrt{x^2+y^2}\le z\le 1$. Решение Пов-ть, по которой интегрируем – часть конуса в верхнем полупространстве, накрытую крышкой – кругом ед. радиуса. Для пов-ти конуса: $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}};\ \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}};$

$dS=\sqrt{1+z_x'+z_y'}\,dxdy=\sqrt{2}dxdy$ Тогда $I=(1+\sqrt{2})\iint_\sigma (x^2+y^2)dxdy$, где интегрируем по ед. кругу в пл-ти z=0, 1 в скобке перед инт-ом учит. вклад от крышки. Переходя в полярные координаты (J=r), получаем: $I=(1+\sqrt{2})\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^1 r^3dr=\frac{\pi}{2}(1+\sqrt{2})$

Билет 2

$I=\int_L (x^2-2xy)dx+(y^2-2xy)dy$ по параболе L, пробег. слева направо: $y=x^2, -1\le x\le 1$. Решение dy=2xdx. Тогда $I=\int_{-1}^1(x^2-2x^3+2x^5-4x^4)dx=-\frac{14}{15}$

Билет 3

$I=\oint_L \frac{(x+y)dx-(x-y)dy}{x^2+y}$ где L – окр., проб. против час. стрелки: $x^2+y^2=a^2$. Решение x=acost, y=asint, t меняется от 0 до 2Pi. Тогда $I=-\int_0^{2\pi}((\cos t+\sin t)\sin t+(\cos t-\sin t)\cos t)dt=-2\pi$

Билет 4

Док-ть, что если S – зам. пов., l – любое пост. напр., то $I=\iint_S\cos(\vec n,\vec l)dS=0$. Решение Пусть l – единичный вектор. Тогда $I=\iint_S(\vec n\bullet\vec l)dS$. Но l – постоянное поле. Тогда $div\vec l\equiv 0$. По ф-ле Г-О приходим к ответу.

Билет 5

По ф-ле Стокса выч-лить $I=\oint_L ydx+zdy+xdz$, где L – окр-ть, проб. в опр. напр. $x^2+y^2+z^2=a^2,\ x+y+z=0$

Решение Инт-ие вед. по окр-ти, обр. сечением сферы пл-ю. Натянем на контур плоский круг с постоянным вектором нормали. При данном обходе вектор нормали образует с Ox (как и с друг. осями) остр. угол. Знач., его напр. косинусы положительны. Известно, что если Ax+By+Cz+D=0 – ур-ие пл-ти, то $\vec m\{A,B,C\}$ перпенд. этой пл-ти. В нашем случае $\vec m\{1,1,1\}$. Тогда $\vec n=\frac{1}{\sqrt3}\vec i+\frac{1}{\sqrt3}\vec j+\frac{1}{\sqrt3}\vec k$, а

$rot\vec A=\begin{vmatrix}\vec i&\vec j&\vec k\\ \frac{\partial}{\partial x}&\frac{\partial}{\partial y}&\frac{\partial}{\partial z}\\ y&z&x\end{vmatrix}=-\vec i-\vec j-\vec k$. Тогда $(\vec n\bullet rot\vec A)=-\sqrt3$ и, по Стоксу, $I=-\sqrt3\iint_S dS=-\sqrt3\pi a^2$

Билет 6

$\int_L(x^2+y^2+z^2)ds$, где L – часть винт. линии $x=a\cos t, y=a\sin t, z=bt, 0\le t\le 2\pi$. Решение Винт. линия – спиралька. $I=\int_0^{2\pi}(a^2+b^2t^2)\sqrt{a^2+b^2}dt=\frac{2\pi}{3}(3a^2+4\pi^2b^2)\sqrt{a^2+b^2}$

Билет 7

$I=\int_{A\to B}(x^2-yz)dx+(y^2-xz)dy+(z^2-xy)dz$ по отрезку винт. линии $x=a\cos\varphi, x=a\sin\varphi, z=\frac{h}{2\pi}\varphi$ от т.A (a, 0, 0) до т.B (a, 0, h). Решение Замк. винт. линию отрезком BA. Натенем на контур пов-ть (она сложна – это геликоид). Если I_0 - вклад от добавленного отрезка, то по Стоксу $I+I_0=\iint_S(\vec n\bullet rot\vec A)dS$.

$rot\vec A=\begin{vmatrix}\vec i&\vec j&\vec k\\ \frac{\partial}{\partial x}&\frac{\partial}{\partial y}&\frac{\partial}{\partial z}\\ x^2-yz&y^2-xz&z^2-xy\end{vmatrix}\equiv0$. Значит, $I=-I_0$.

Взяв за переменную инт-ия z и учтя x=a, y=0, dx=dy=0. $I=-I_0=-\int_h^0 z^2dz=\frac{h^3}{3}$.

Билет 8

По формуле Г-О преобр. в объемный: $I=\iint_S\frac{x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}dS$, где S огр. конечн. объём V, а косинусы – напр. косинусы внешн. нормали к S. Решение

$P=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ $Q=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ $R=\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$

Значит, $\vec A=\frac{\vec r}{r}$ - ед. вектор, напр. из нач. коорд. в точку наблюдения. $div\vec A=(\vec\nabla\bullet\frac{\vec r}{r})=(\vec r\bullet\vec\nabla\frac{1}{r})+\frac{1}{r}(\vec\nabla\bullet\vec r)$. Но $\vec\nabla f(r)=f'(r)\frac{\vec r}{r}\Rightarrow\vec\nabla\frac{1}{r}=-\frac{\vec r}{r^3}$. Тогда $div\vec A=-\frac{1}{r^3}(\vec r\bullet\vec r)+\frac{3}{r}=\frac{2}{r}$.

$I=2\iiint_V\frac{dV}{r}=2\iiint_V\frac{dV}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$

Билет 9

$rot[f(r)\vec r]=?$ Решение

$rot[f(r)\vec r]=[\vec\nabla\times f(r)\vec r]=[\vec\nabla f(r)\times\vec r]+f(r)[\vec\nabla\times\vec r]=$

$=\frac{f'(r)}{r}[\vec r\times\vec r]+0\equiv0$

Билет 10

$I=\oint_L(x+y)dx+(x-y)dy$, где L – эллипс, проб. против час. стрелки: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ Решение Ур-ие эллипса в парам. форме: $x=a\cos t; y=b\sin t; 0\le t\le 2\pi$. Тогда $dx=-a\sin tdt; dy=b\cos tdt$ и

$I=\int_0^{2\pi}[ab(\cos^2t-\sin^2t)-(a^2+b^2)\sin t\cos t]dt=$

$=\int_0^{2\pi}[ab\cos 2t-\frac{1}{2}(a^2+b^2)\sin 2t]dt=0$. Из формулы Грина – сразу 0.

Билет 11

По Стоксу вычислить $I=\oint_L(y+z)dx+(z+x)dy+(x+y)dz$, где L – эллипс, проб. в напр-ии возр. t: $x=a\sin^2t; y=2a\sin t\cos t, z=a\cos^2t; 0\le t\le\pi$ Решение

$rot\vec A=\begin{vmatrix}\vec i&\vec j&\vec k\\ \frac{\partial}{\partial x}&\frac{\partial}{\partial y}&\frac{\partial}{\partial z}\\ y+z&z+x&x+y\end{vmatrix}\equiv\vec 0$. Зн., и данный инт-ал =0

Билет 12

$\int_L(x+y)dl$, где L – контур треуг. с вершинами O(0,0), A(1,0) и B(0,1). Решение $I=I_1+I_2+I_3$, где $I_1=\int_0^1xdx=\frac{1}{2}$. Анал., $I_2=\frac{1}{2}$. Примем $x=t;\ y=1-t;\ \tau=0;T=1$. Тогда $I_3=\int_0^1\sqrt2dt=\sqrt2$ и $I=1+\sqrt2$

Билет 13

$I=\iint_S(x+y+z)dS$, где S: $x^2+y^2+z^2=a^2,\ z\ge0$.

Решение Введем сфер. с.к.: $\vec r(\varphi,\theta)=\vec ia\sin\theta\cos\varphi+\vec ja\sin\theta\sin\varphi+\vec ka\cos\theta$.

$dS=\left|[\vec r_\varphi\times\vec r_\theta]\right|d\varphi d\theta=a^2\sin\theta d\varphi d\theta$. Тогда

$I=a^3\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\pi/2}[\sin\theta(\cos\varphi+\sin\varphi)+\cos\theta]\sin\theta d\theta=$

$=a^3 2\pi\int_0^{\pi/2}\sin\theta\cos\theta d\theta=\pi a^3$

Билет 14

$\int_{(1,0)}^{(6,8)}\frac{xdx+ydy}{\sqrt{x^2+y^2}}$ вдоль путей, не прох. через нач. коорд.

Решение $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}=-\frac{xy}{(x^2+y^2)^{3/2}}$

$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}=-\frac{xy}{(x^2+y^2)^{3/2}}$. Зн., по ф-ле Грина, инт. от этого поля не зав. от пути. Найдём потенциал, двигаясь от т. (1,1) до т.(x,y): $U(x,y)=\int_1^x\frac{xdx}{\sqrt{x^2+1}}+\int_1^y\frac{ydy}{\sqrt{x^2+y^2}}$. Откуда

$U=\sqrt{x^2+y^2}+C$ и $I=U(M)-U(M_0)=9$

Билет 15

$rot\vec cf(r)=?$ Решение

$rot\vec cf(r)=[\vec\nabla\times\vec cf(r)]=[\vec\nabla f(r)\times\vec c]+0=\frac{f'(r)}{r}[\vec r\times\vec c]$ - это вект. поле всюду перп. и c и r. Оно обращ. в нуль вдоль прямой, прох. через нач. коор. и паралл. вектору c.

Билет 16

Показать что поле $\vec A=\vec iyz(2x+y+z)+\vec jxz(x+2y+z)+\vec kxy(x+y+2z)$ - потенциальное и найти его потенциал. Решение

$rot\vec A=\begin{vmatrix}\vec i&\vec j&\vec k\\ \frac{\partial}{\partial x}&\frac{\partial}{\partial y}&\frac{\partial}{\partial z}\\ P&Q&R\end{vmatrix}\equiv0$. Зн., поле потенциально. Найдём U: $\int_{(x_0,y_0,z_0)}^{(x,y,z)}(\vec A\bullet d\vec r)=U(x,y,z)-U(x_0,y_0,z_0)$. Сперва пойдём по x от (0,0,0) до (x,0,0). Затем по y до (x,y,0). Затем по z до (x,y,z). Тогда

$U=\int_0^xP(x',0,0)dx'+\int_0^yQ(x,y',0)dy'+\int_0^zR(x,y,z')dz'$.

$U=\int_0^x0dx+\int_0^y0dy+\int_0^zxy(x+y+2z')dz'=xyz(x+y+z)+C$

Билет 17

Жидкость, заполн. про-во, вращ. вокр. оси $\vec l\{\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma\}$ с пост. угл. скор. ω. Найти $rot\vec\upsilon$ в т. M(x,y,z) в текущий момент времени. Решение $\vec\upsilon=[\vec\omega\bullet\vec r]=\omega[\vec l\times\vec r]$, где $\vec l=\vec i\cos\alpha+\vec j\cos\beta+\vec k\cos\gamma$ - единичн. вектор. $rot\vec\upsilon=\omega[\vec\nabla\times[\vec l\times\vec r]]=\vec l(\vec\nabla\bullet\vec r)-\vec r(\vec\nabla\bullet\vec l)$ $\vec l(\vec\nabla\bullet\vec r)=3\vec l$, второе слагаемое – зависший диф. оператор. Преобразуем его: $\vec r(\vec\nabla\bullet\vec l)=(\vec l\bullet\vec\nabla)\vec r=\vec l$, тогда $rot\vec\upsilon=2\omega\vec l=2\vec\omega$

Билет 18

$I=\int_L ydx+zdy+xdz$, где L – виток винт. линии, проб. в напр. возр. парам. $x=a\cos t$, $y=a\sin t$, $z=bt$, $0\le t\le 2\pi$

Решение $I=-a^2\int_0^{2\pi}\sin^2tdt+ab\int_0^{2\pi}t\cos tdt+ab\int_0^{2\pi}\cos tdt$.

$I_1=-a^2\int_0^{2\pi}\sin^2tdt=-a^2\int_0^{2\pi}(1-\cos 2t)/2dt=-\pi a^2$,

$ab\int_0^{2\pi}t\cos tdt=\left[\begin{matrix}u=t&du=dt\\ dv=\cos tdt&v=\sin t\end{matrix}\right]=-ab\int_0^{2\pi}\sin tdt=0$.

Очевидно, $I_3=0$. Итак, $I=-\pi a^2$

Билет 19

$I=\oint_L xy^2dy-x^2ydx$, где L – окр: $x^2+y^2=a^2$. Решение

По Грину, $I=\iint_S (x^2+y^2)dxdy$. Замена $x=r\cos t;\ y=r\sin t$, тогда $dxdy=|J|drdt$, где $J=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial r}\\ \frac{\partial x}{\partial t} & \frac{\partial y}{\partial t}\end{vmatrix}$. У нас J=r. Тогда, $I=\int_0^a rdr\int_0^{2\pi} r^2dt=\frac{\pi a^4}{2}$

Билет 20

$I_L=\oint_L \frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}$, где L – простой замк. контур, не прох. через нач. коорд., проб. в полож. напр-ии. Решение $\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\frac{x}{x^2+y^2}=\frac{y^2-x^2}{x^2+y^2}=\frac{\partial P}{\partial y}$. Значит, по Грину, двойной интеграл равен 0, а значит равен 0 и I_L . Это верно только когда внутрь L не попад. начало коорд. Если попадает – нельзя применять Грина. Окружим начало коорд. окружн. L_a малого радиуса a (такого, чтобы эта окр. целиком лежала в L). По этой окружности $I_a=\oint_{L_a}\frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}$ можно вычислить, заменив $x=a\cos t;\ y=a\sin t$. Откуда $I_a=\int_0^{2\pi}dt=2\pi$.

Проведем перемычку, соед. L с окр-тью. Рассм. контур L’, образованный L, перемычкой и окр-тью. Обойдём по L, от точки смыкания с перемычкой, возвр. в эту точку с друг. стороны. Затем пройд. по перемычке до окр-ти, обойдём её, и по перемычке же вернёмся в исходную точку. Внутри L’ содержится обл-ть, закл. между L и окр-тью. Она не содержит (0,0), а значит инт-ал по L’ равен 0. С другой стороны, $I_{L'}=I_L-I_a=0$. Минус возник из-за того, что инт-ал по окр-ти мы вычисляли, обходя её против час. стрелки, в то время как полож. напр-ие обхода L’ соотв. обходу окр. по час. стрелке. Итак, $I_L=I_a=2\pi$.

Билет 21

Определить силовые линии: $\vec A=\vec ix+\vec jy+\vec k2z$. Решение Пусть $r=\vec r(t)$ - задание искомой силовой линии в параметрической форме. По определению силовой линии $\frac{d\vec r}{dt}=\lambda\vec A(\vec r)$, где $\lambda\neq 0$ - произв. постоянная. При подходящем выборе масштаба t, $\lambda=1$. Тогда $\frac{d\vec r}{dt}=\vec A(\vec r)$ сводится к $\frac{dx}{dt}=x,\ \frac{dy}{dt}=y,\ \frac{dz}{dt}=2z$. Общие решения: $x=C_1e^t,\ y=C_2e^t,\ z=C_3e^{2t}$. Отсюда $y=c_1x,\ z=c_2x^2$, где $c_1=C_2/C_1$, $c_2=C_3/C_1^2$.

Билет 22

Доказать $\iiint_V\frac{dxdydz}{r}=\frac{1}{2}\iint_S\cos(\widehat{\vec r,\vec n})dS$, где S – замк. пов-ть, огранич. V, n – внешняя нормаль к S в т. (x,y,z), $r=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}$ и $\vec r$ - радиус-вектор, идущий от т. наблюдения (x_0,y_0,z_0) к точке поверхности (x,y,z). Решение $\cos(\widehat{\vec r,\vec n})=(\frac{\vec r}{r}\bullet\vec n)$. Тогда, по формуле Г-О, $\iint_S(\frac{\vec r}{r}\bullet\vec n)dS=\iiint_V div\frac{\vec r}{r}dV=2\iiint_V\frac{dV}{r}$, т.к. $div\vec A=(\vec\nabla\bullet\frac{\vec r}{r})=(\vec r\bullet\vec\nabla\frac{1}{r})+\frac{1}{r}(\vec\nabla\bullet\vec r)$. Но $\vec\nabla f(r)=f'(r)\frac{\vec r}{r}\Rightarrow\vec\nabla\frac{1}{r}=-\frac{\vec r}{r^3}$. Тогда $div\vec A=-\frac{1}{r^3}(\vec r\bullet\vec r)+\frac{3}{r}=\frac{2}{r}$. Это верно, поскольку дивергенция не зависит от системы координат, а лишь от поведения в окрестности рассматриваемой точки. В нашем случае т. (x,y,z).

Билет 23

Пусть L – замк. контур, расположенный в плоскости $x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma-p=0$, и огр. площ-ку S. Найти $\oint_L\begin{vmatrix}dx & dy & dz\\ \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma\\ x & y & z\end{vmatrix}$, где L пробегается в положительном направлении. Решение Интегр. векторное поле представляет собой: $\vec A=[\vec n\times\vec r]$, где $\vec n$ - нормаль к указанной плоскости. $rot\vec A=[\vec\nabla\times[\vec n\times\vec r]]=\vec n(\vec\nabla\bullet\vec r)-(\vec n\bullet\vec\nabla)\vec r=2\vec n$. Тогда, по Стоксу, $I=2S$ - удвоенная площадь плоской площадки, ограниченной контуром.

Билет 24

$I=\iint_S|xyz|dS$, где S – часть поверхности $z=x^2+y^2$, отсек. плоскостью z=1. Решение Спроектируем указанный кусок параболоида на круг радиуса 1 в пл-ти (x,y) и учтем, что $dS=\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}dxdy=\sqrt{1+4(x^2+y^2)}dxdy$, получим $I=\iint_{x^2+y^2\le 1}|xy(x^2+y^2)|\sqrt{1+4(x^2+y^2)}dxdy$. Перейдя к полярной системе координат, получим: $I=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}|\sin 2t|dt\int_0^1 r^5\sqrt{1+4r^2}dr=2\int_0^{\pi/2}\sin 2tdt\int_0^1 r^5\sqrt{1+4r^2}dr=$ $=2\int_0^1 r^5\sqrt{1+4r^2}dr$. Заменим $u^2=1+4r^2,\ 4rdr=udu$: $I=\frac{1}{32}\int_1^{\sqrt5}u^2(u^2-1)^2du=\frac{125\sqrt5-1}{420}$.

Билет 25

Найти первообразную, если: $dz=(x^2+2xy-y^2)dx+(x^2-2xy-y^2)dy$. Решение $\frac{\partial P}{\partial y}=2x-2y=\frac{\partial Q}{\partial x}$. Вычислим потенциал, взяв за исходную точку начало координат: $z=\int_0^x x^2dx+\int_0^y(x^2-2xy-y^2)dy+C$. Получаем, $z=\frac{1}{3}x^3+x^2y-xy^2-\frac{1}{3}y^3+C$