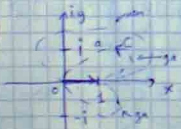
$$\left\{ i\int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi i, \quad n=-1. \right.$$

Если a вне C, то $\int_C \frac{dz}{z-a} = 0$ по ф. и Коши.

Если внутри контура ф-ия аналитическая, то $\int = 0$.

$\boxed{11.10.}$ Домашняя работа

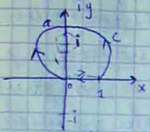
№404 $J=\int_0^1 \frac{d\xi}{1+\xi^2} = \frac{\pi}{4}+k\pi,\ k\in \mathbb{Z}$, путь не проходит через $\pm i$.

1) 

$J=\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x\Big|_0^1 = \frac{\pi}{4}+0=\frac{\pi}{4}.$

Если путь не содержит в себе точек $\pm i$ и не проходит через них, то функция, стоящая под интегралом, аналитическая в области, ограниченной пути и отрезком [0; 1]. Тогда, по теореме Коши $\oint_C \frac{d\xi}{1+\xi^2} = 0 = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} + \int_{1a0} \frac{d\xi}{1+\xi^2} \Rightarrow \int_{0a1}\frac{d\xi}{1+\xi^2} = \frac{\pi}{4}$

2)



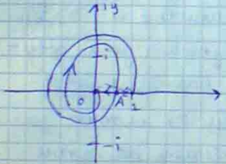
Дополним путь 0a1 отрезком [0; 1], проходимым в обоих направлениях. $\int_{0a1}\frac{d\xi}{1+\xi^2} = -\oint_C \frac{d\xi}{1+\xi^2} + \int_0^1\frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{4} - \oint_C\frac{d\xi}{1+\xi^2}$. Так как подынтегральная функция неопределена только в т. i, заменим интеграл по контуру C на интеграл по окружности $|z-i|=\delta$.

$z - i = \delta e^{i\varphi}$; $z = i+\delta e^{i\varphi}$; $\oint_C \frac{d\xi}{1+\xi^2} = \int_{|z-i|=\delta}\frac{dz}{1+z^2}$

$$\frac{dz}{1+z^2} = \frac{dz}{(z-i)(z+i)} = \frac{1}{2i}\left(\frac{dz}{z-i} - \frac{dz}{z+i}\right) = \frac{1}{2i}(J_1 - J_2);$$

$\int_{|z-i|=\delta} J_1 = \int_0^{2\pi}\frac{\delta i e^{i\varphi}d\varphi}{\delta e^{i\varphi}} = 2\pi i$; $\int_{|z-i|=\delta} J_2 = 0$ - по теореме Коши,

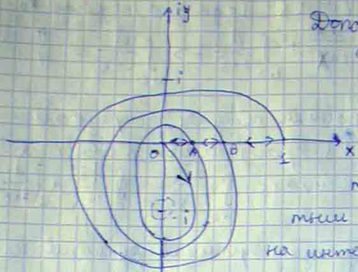
$\int_{|z-i|=\delta}\frac{dz}{1+z^2} = \frac{1}{2i}\left(\int_{|z-i|=\delta}J_1 - \int_{|z-i|=\delta}J_2\right) = \pi$. $\int_{0a1}\frac{d\xi}{1+\xi^2} = \frac{\pi}{4} - \pi$;



Заменим путь на дополненный отрезками 0A и A1, проходимыми в обе стороны. Интегралы по замкнутым путям заменим на интегралы по окружности $|z-i|=\delta$, т.е. $\int_0^1 \frac{d\xi}{1+\xi^2} = \int_0^1\frac{dx}{1+x^2} + K\oint_{|z-i|=\delta}\frac{dz}{1+z^2} = \frac{\pi}{4} - K\pi = \frac{\pi}{4}+K_1\pi$,

где K и K_1 - целые числа, указывающие, сколько раз путь обвивается вокруг т. i. В этом случае путь не содержит т. $-i$.

3) Путь содержит т. $-i$.



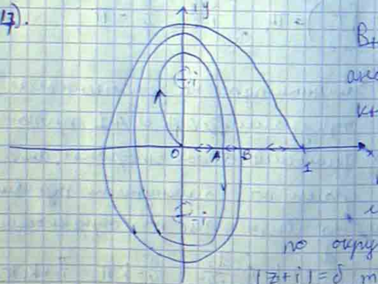
Дополним исходные пути отрезками OA, AB и B1, проходимыми в обе стороны и, аналогично п. 2 интегралы по замкнутым путям заменим на интегралы по окружности $|z+i|=\delta$, т.е.

$\int_0^1 \frac{d\xi}{1+\xi^2} = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} + K\oint_{|z+i|=\delta} \frac{dz}{1+z^2}$, где K - целое число указ., сколько раз путь обвивает т. $-i$.

$\int_{|z+i|=\delta} J_1 = 0$ - по теореме Коши, $\int_{|z+i|=\delta} J_2 = \int_0^{2\pi} \frac{\delta i e^{i\varphi} d\varphi}{\delta e^{i\varphi}} = 2\pi i$;

$\oint_{|z+i|=\delta} \frac{dz}{1+z^2} = -\pi$, т.е. $\int_0^1 \frac{d\xi}{1+\xi^2} = \frac{\pi}{4} + K_2\pi$, где $K_2 \in \mathbb{Z}$

4).



Вновь дополним путь аналогично п. 3. Замкнутые пути, обвивающие точки $\pm i$ можно заменить на пути по окружностям $|z-i|=\delta$ и $|z+i|=\delta$, т.е. $\oint_{AB} \frac{d\xi}{1+\xi^2} = \int_{|z-i|=\delta} \frac{d\xi}{1+\xi^2} + \int_{|z+i|=\delta} \frac{d\xi}{1+\xi^2} = -2\pi$ - по теореме Коши (следствие).

Тогда $\int_0^1 \frac{d\xi}{1+\xi^2} = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} + K\oint \frac{d\xi}{1+\xi^2} = \frac{\pi}{4} + K\pi$

ч.т.д.

№413 $J=\int\limits_C \frac{dz}{z(z^2-1)} = \int\limits_C \frac{dz}{z(z-1)(z+1)}$ при различных положениях C.

1) Контур содержит т. $z=0 \Rightarrow \int\limits_C \frac{dz}{z(z-1)(z+1)} =$ (форм. Коши) $= 2\pi i \left.\frac{1}{(z-1)(z+1)}\right|_{z=0} = -2\pi i$; $I_1=-2\pi i$, не сод. ± 1.

2) Контур сод. т. $z=1 \Rightarrow \int\limits_C \frac{dz}{z(z-1)(z+1)} = 2\pi i \left.\frac{1}{z(z+1)}\right|_{z=1} = \pi i$; не сод. 0 и -1.

3) —"— $z=-1$, $\int\limits_C \frac{dz}{z(z-1)(z+1)} = 2\pi i \left.\frac{1}{z(z-1)}\right|_{z=-1} = \pi i$, $I_2=I_3=\pi i$, не сод. 0 и 1.

4) —"— $z=0$ и $z=1 \Rightarrow J = I_1+I_2 = -\pi i$; не сод. -1

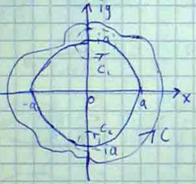
5) —"— $z=0$ и $z=-1 \Rightarrow J = I_1+I_3 = -\pi i$, не сод. 1.

6) —"— $z=1$ и $z=-1 \Rightarrow J = I_2+I_3 = 2\pi i$; не сод. 0.

7) —"— $z=0$, $z=1$ и $z=-1 \Rightarrow J = I_1+I_2+I_3 = 0$.

Ответ: $I = -2\pi i;\ -\pi i,\ 0,\ \pi i;\ 2\pi i$.

№416 $\frac{1}{2\pi i}\int\limits_C \frac{e^z dz}{z^2+a^2}$, если C содержит $|z|\le a$;



$$\int\limits_C \frac{e^z dz}{z^2+a^2} = \int\limits_{C_1} \frac{e^z dz}{z^2+a^2} + \int\limits_{C_2} \frac{e^z dz}{z^2+a^2},$$

$$\int\limits_{C_1} \frac{e^z dz}{z^2+a^2} = \int\limits_{C_1} \frac{e^z dz}{(z-ia)(z+ia)} = \left.\frac{2\pi i e^z}{z+ia}\right|_{z=ia} = \frac{e^{ia}2\pi i}{2ia} = \frac{\pi}{a}(\cos a + i\sin a)$$

$$\int\limits_{C_2} \frac{e^z dz}{z^2+a^2} = \left.\frac{2\pi i e^z}{z-ia}\right|_{z=-ia} = -\frac{\pi}{a}e^{-ia} = -\frac{\pi}{a}(\cos a - i\sin a) =$$

$= \frac{\pi}{a}(i\sin a - \cos a)$; $\int\limits_C \frac{e^z dz}{z^2+a^2} = \frac{\pi}{a}\cdot 2i\sin a = 2\pi i\frac{\sin a}{a}$,

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_C \frac{e^z dz}{z^2+a^2} = \frac{\sin a}{a}.$$

№ 417 $\frac{1}{2\pi i}\int\limits_C \frac{ze^z dz}{(z-a)^3}$, если a лежит внутри контура C;

$$\int\limits_C \frac{ze^z dz}{(z-a)^3} = \frac{2\pi i}{2}\frac{d^2}{dz^2}(ze^z)\Big|_{z=a} = \pi i\,(2e^a + ae^a)$$

$$(ze^z)' = e^z + ze^z,\quad (ze^z)'' = e^z + e^z + ze^z = 2e^z + ze^z$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_C \frac{ze^z dz}{(z-a)^3} = \frac{1}{2}(2e^a + ae^a) = e^a\left(1 + \frac{a}{2}\right).$$

$+\frac{z^6}{3!}+\frac{z^8}{4!}+\ldots)dz = z+\frac{z^3}{3}+\frac{z^5}{5\cdot 2!}+\frac{z^7}{7\cdot 3!}+\frac{z^9}{9\cdot 4!}+\ldots =$

$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{2n+1}}{n!(2n+1)}$. Сходится при $|z^2|<+\infty \Rightarrow |z|^2<$

$<+\infty$; $|z|<+\infty$.

№467 $\frac{z}{z+2}=\frac{z-1+1}{z+2}=\frac{z-1}{z+2}+\frac{1}{z+2}$; $\frac{1}{z+2}=\frac{1}{z-1+3}=$

$=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1+\frac{z-1}{3}}=\frac{1}{3}\left(1-\frac{z-1}{3}+\frac{(z-1)^2}{3^2}-\frac{(z-1)^3}{3^3}+\ldots\right)$;

$\frac{z}{z+2}=\frac{z-1}{3}-\frac{(z-1)^2}{3^2}+\frac{(z-1)^3}{3^3}-\frac{(z-1)^4}{3^4}+\ldots+\frac{1}{3}-\frac{z-1}{3^2}+$

$+\frac{(z-1)^2}{3^3}-\frac{(z-1)^3}{3^4}+\ldots=\frac{1}{3}+(z-1)\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{3^2}\right)+(z-1)^2\left(\frac{1}{3^3}-\frac{1}{3^2}\right)+$

$+(z-1)^3\left(\frac{1}{3^3}-\frac{1}{3^4}\right)+(z-1)^4\left(\frac{1}{3^5}-\frac{1}{3^4}\right)+\ldots=\frac{1}{3}+\frac{2(z-1)}{3^2}-$

$-\frac{2(z-1)^2}{3^3}+\frac{2(z-1)^3}{3^4}-\frac{2(z-1)^4}{3^5}+\ldots=\frac{1}{3}+2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(z-1)^n}{3^{n+1}}$.

Сходится при $\left|\frac{z-1}{3}\right|<1$, $|z-1|<3 \Rightarrow R=3$.

$\boxed{02.11.}$ Домашняя работа.

№546 3) $z=\infty$: $\frac{1}{a-b}\left(\frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{a}{z}}-\frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{b}{z}}\right)=\frac{1}{a-b}\left(\frac{1}{z}\left(1+\right.\right.$

$\left.\left.+\frac{a}{z}+\left(\frac{a}{z}\right)^2+\ldots\right)-\frac{1}{z}\left(1+\frac{b}{z}+\frac{b^2}{z^2}+\ldots\right)\right)=\frac{1}{a-b}\sum_{n=2}^{\infty}\left(a^{n-1}-b^{n-1}\right)\frac{1}{z^n}$.

Сх. при $\left|\frac{a}{z}\right|<1$ и $\left|\frac{b}{z}\right|<1 \Rightarrow |z|>|a|$ и $|z|>|b| \Rightarrow |z|>|b|$.

№544 $\frac{1}{(z-a)^k}$ $(a\neq 0, k\in N)$ в окрест. $z=0$ и $z=\infty$;

1) $\underline{z=0}$ $\frac{1}{(z-a)^k}=(z-a)^{-k}=(-1)^{-k}a^{-k}\left(1-\frac{z}{a}\right)^{-k}=\frac{(-1)^k}{a^k}\left(1-\frac{z}{a}\right)^{-k}=$

$=\frac{(-1)^k}{a^k}\left(1+\binom{-k}{1}\left(-\frac{z}{a}\right)+\binom{-k}{2}\left(\frac{z}{a}\right)^2-\binom{-k}{3}\left(\frac{z}{a}\right)^3+\ldots\right)=$

$=\frac{(-1)^k}{a^k}\sum_{n=0}^{\infty}\binom{n+k-1}{k-1}\left(\frac{z}{a}\right)^n$ (проверим, что формула

03.11. Классификация особых точек аналитической функции.

Отменили занятие

из ответа подходит при $n=3$ и $k=3$). Ряд сходится при $\left|-\frac{z}{a}\right|<1$; $|z|<|a|$.

2) $\underline{z=\infty}$ $(z-a)^{-k}=z^{-k}\left(1-\frac{a}{z}\right)^{-k}=\frac{1}{z^k}\left(1+\binom{-k}{1}\left(-\frac{a}{z}\right)+\binom{-k}{2}\left(\frac{a}{z}\right)^2-\binom{-k}{3}\left(\frac{a}{z}\right)^3+\ldots\right)=$ (считая верной формулу из предыдущего пункта) $=\frac{1}{z^k}\sum_{n=0}^{\infty}\binom{n+k-1}{k-1}\left(\frac{a}{z}\right)^n$. Сходится при $\left|-\frac{a}{z}\right|<1$ $|z|>|a|$.

№547 $\frac{z^2-2z+5}{(z-2)(z^2+1)}$ в окр. $z=2$ и в $1<|z|<2$.

1) $\underline{z=2}$; $(z^2-2z+5=0$; $z_{1,2}=\frac{2\pm\sqrt{4-20}}{2}=\frac{2\pm4i}{2}=$
$=1\pm2i$; $z^2-2z+5=(z-1-2i)(z-1+2i))$; $z^2+1=$
$=(z-i)(z+i)$; $\frac{z^2-2z+5}{(z-2)(z^2+1)}=\frac{A}{z-2}+\frac{B}{z-i}+\frac{C}{z+i}=$
$=\frac{Az^2+A+B(z^2+zi-2z-2i)+C(z^2-iz-2z+2i)}{(z-2)(z^2+1)}$.

$Az^2+A+Bz^2+Bzi-2zi-2iB+Cz^2-Czi-2zC+2iC=$
$=z^2(A+B+C)+z(Bi-2i-Ci+2i)+A-2iB+2iC$;

$A+B+C=1$; $Bi=Ci-2$; $B=-C$; $-Ci=Ci-2$

$Bi-Ci=-2$; $A-2Ci+4+2Ci=5$, $2Ci=2$, $Ci=1$,

$A-2iB+2iC=5$; $A=1$; $C=\frac{1}{i}=-i$; $B=i$.

$\frac{z^2-2z+5}{(z-2)(z^2+1)}=\frac{1}{z-2}+\frac{i}{z-i}-\frac{i}{z+i}=\frac{1}{z-2}+\frac{i}{z-i-2+2}-$

$$+\frac{i}{z-2+i+2} = \frac{1}{z-2} + \frac{i}{2-i}\,\frac{1}{1+\frac{z-2}{2-i}} - \frac{i}{2+i}\,\frac{1}{1+\frac{z-2}{2+i}} =$$

$$= \frac{1}{z-2} + \frac{i}{2-i}\left(1 - \frac{z-2}{2-i} + \left(\frac{z-2}{2-i}\right)^2 - \left(\frac{z-2}{2-i}\right)^3 + \dots\right) - \frac{i}{2+i}\cdot$$

$$\cdot\left(1 - \frac{(z-2)}{2+i} + \left(\frac{z-2}{2+i}\right)^2 - \left(\frac{z-2}{2+i}\right)^3 + \dots\right) = \frac{1}{z-2} + i\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(z-2)^n}{(2-i)^{n+1}} -$$

$$- i\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(z-2)^n}{(2+i)^{n+1}} = \frac{1}{z-2} + i\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{(2-i)^{n+1}} - \frac{1}{(2+i)^{n+1}}\right)(z-2)^n(-1)^n =$$

$$= \frac{1}{z-2} + i\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(2+i)^{n+1}-(2-i)^{n+1}}{5^{n+1}}(z-2)^n.$$

Ряд сходится при $\left|\frac{z-2}{2-i}\right|<1$ и $\left|\frac{z-2}{2+i}\right|<1$: $|z-2|<\sqrt{5}$, т.е. при $0<|z-2|<\sqrt{5}$.

2) $\underline{1<|z|<2}$: $\frac{z^2-2z+5}{(z-2)(z^2+1)} = \frac{1}{z-2} + \frac{i}{z-i} - \frac{i}{z+i} =$

$$= -\frac{1}{2}\,\frac{1}{1-\frac{z}{2}} + \frac{i}{z}\,\frac{1}{1-\frac{i}{z}} - \frac{i}{z}\,\frac{1}{1+\frac{i}{z}} = -\frac{1}{2}\left(1+\frac{z}{2}+\left(\frac{z}{2}\right)^2+\right.$$

$$\left.+\left(\frac{z}{2}\right)^3+\dots\right) + \frac{i}{z}\left(1+\frac{i}{z}+\left(\frac{i}{z}\right)^2+\left(\frac{i}{z}\right)^3+\dots\right) - \frac{i}{z}\left(1-\frac{i}{z}+\left(\frac{i}{z}\right)^2-\right.$$

$$\left.-\left(\frac{i}{z}\right)^3+\dots\right) = -\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^n + \frac{i}{z}\left(\frac{2i}{z} + 2\left(\frac{i}{z}\right)^3 + 2\left(\frac{i}{z}\right)^5 +\right.$$

$$\left.+2\left(\frac{i}{z}\right)^7 + \dots\right) = -\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^n - \frac{2}{z^2} + \frac{2}{z^4} - \frac{2}{z^6} + \frac{2}{z^8} - \dots =$$

$$= 2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{z^{2n}} - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^{n+1}}.$$ Сходится при $\left|\frac{z}{2}\right|<1$ и $\left|\frac{i}{z}\right|<1$ =>

=> $|z|<2$; $|z|>1$, т.е. при $1<|z|<2$.

№548 $\frac{1}{(z^2+1)^2}$ в окр. точек $z=i$ и $z=\infty$

1) $\underline{z=i}$ $\frac{1}{(z^2+1)^2} = \frac{1}{(z-i)^2}\cdot\frac{1}{(z+i)^2} = \frac{1}{(z-i)^2}\cdot\frac{1}{(z-i+2i)^2} =$

$$= \frac{1}{(z-i)^2} \cdot \frac{1}{(2i)^2\left(1+\frac{z-i}{2i}\right)^2} = \frac{1}{(z-i)^2}\left(-\frac{1}{4}\right)\left(1+\frac{z-i}{2i}\right)^{-2} =$$

$$= \frac{1}{(z-i)^2}\left(-\frac{1}{4}\right)\left(1+\frac{(-2)(z-i)}{2i}+\frac{(-2)(-3)(z-i)^2}{2!(2i)^2}+\frac{(-2)(-3)(-4)}{3!}\cdot\right.$$

$$\left.\cdot\frac{(z-i)^3}{(2i)^3}+\frac{(-2)(-3)(-4)(-5)(z-i)^4}{4!\,(2i)^4}+\ldots\right) = -\frac{1}{4(z-i)^2}+$$

$$+\frac{\cancel{(z-i)}\ 1}{4(z-i)\ i}+\frac{3}{2^{2+2}}+\frac{4(z-i)\,i}{2^{3+2}}+\frac{5(z-i)^2 i^2}{2^{4+2}}+\ldots\Big\} =$$

$$= -\frac{i}{4(z-i)}-\frac{1}{4(z-i)^2}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+3)\,i^n(z-i)^n}{2^{n+4}}.\ \text{Ряд}$$

сходится при $\left|\frac{z-i}{2i}\right|<1$, $0<|z-i|<2$.

$\boxed{\text{Всегда писать } >0}$ $\rightarrow$

2) $\underline{z=\infty}$ $\frac{1}{(z^2+1)^2} = \frac{1}{z^4}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{z^2}\right)^2} = \frac{1}{z^4}\left(1+\frac{1}{z^2}\right)^{-2} =$

$$= \frac{1}{z^4}\left(1-\frac{2}{z^2}+\frac{(-2)(-3)}{2!\,z^4}+\frac{(-2)(-3)(-4)}{3!\,z^6}+\ldots\right) =$$

$$= \frac{1}{z^4}-\frac{2}{z^6}+\frac{3}{z^8}-\frac{4}{z^{10}}+\ldots = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n}{z^{2n+2}}.$$

Сходится при $\left|\frac{1}{z^2}\right|<1$, $|z|^2>1$; $|z|>1$.

№ 549 $\sqrt{(z-a)(z-b)}$ $(|b|\geq|a|)$ в окр. т. $z=\infty$ обе ветви.

$$\sqrt{(z-a)(z-b)} = \pm(z-a)^{\frac{1}{2}}(z-b)^{\frac{1}{2}} = \pm z\left(1-\frac{a}{z}\right)^{\frac{1}{2}}\left(1-\frac{b}{z}\right)^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \pm z\left(1+\binom{\frac{1}{2}}{1}\left(-\frac{a}{z}\right)+\binom{\frac{1}{2}}{2}\left(-\frac{a}{z}\right)^2+\binom{\frac{1}{2}}{3}\left(-\frac{a}{z}\right)^3+\binom{\frac{1}{2}}{4}\left(-\frac{a}{z}\right)^4+\ldots\right)\cdot$$

$$\left(1+\binom{\frac{1}{2}}{1}\left(-\frac{b}{z}\right)+\binom{\frac{1}{2}}{2}\left(-\frac{b}{z}\right)^2+\binom{\frac{1}{2}}{3}\left(-\frac{b}{z}\right)^3+\binom{\frac{1}{2}}{4}\left(-\frac{b}{z}\right)^4+\ldots\right) =$$

$= \pm \left(z - \frac{a}{2} - \frac{b}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_{-n}}{z^n} \right)$, где $C_{-(n-1)} = (-1)^n \cdot$
$\cdot \left(\binom{\frac{1}{2}}{n} b^n + \binom{\frac{1}{2}}{n-1}\binom{\frac{1}{2}}{1} b^{n-1} a + \binom{\frac{1}{2}}{n-2}\binom{\frac{1}{2}}{2} b^{n-2} a^2 + \ldots + \right.$
$\left. + \binom{\frac{1}{2}}{n} a^n \right)$. Проверим коэффициент при z^{-3}:
$C_{-(4-1)} = (-1)^4 \left(\binom{\frac{1}{2}}{4} b^4 + \binom{\frac{1}{2}}{3}\binom{\frac{1}{2}}{1} b^3 a + \binom{\frac{1}{2}}{2}\binom{\frac{1}{2}}{2} b^2 a^2 + \right.$
$\left. + \binom{\frac{1}{2}}{1}\binom{\frac{1}{2}}{3} b a^3 + \binom{\frac{1}{2}}{4} a^4 \right)$. С другой стороны,
$C_{-3} = \binom{\frac{1}{2}}{4} b^4 + \binom{\frac{1}{2}}{1}\binom{\frac{1}{2}}{3} a b^3 + \binom{\frac{1}{2}}{2}\binom{\frac{1}{2}}{2} a^2 b^2 +$
$+ \binom{\frac{1}{2}}{3}\binom{\frac{1}{2}}{1} a^3 b + \binom{\frac{1}{2}}{4} a^4$. Значит, формула в ответе верна. Ряд сходится при
$\left|-\frac{a}{z}\right| < 1$ и $\left|-\frac{b}{z}\right| < 1$; $|z| > |a|$ и $|z| > |b|$; $|z| > |b|$.

№551 $z^2 e^{\frac{1}{z}}$ в окр. $z = 0$ и $z = \infty$.

$z^2 e^{\frac{1}{z}} = z^2 \left(1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!z^2} + \frac{1}{3!z^3} + \frac{1}{4!z^4} + \ldots \right) =$
$= z^2 + z + \frac{1}{2} + \frac{1}{3!z} + \frac{1}{4!z^2} + \ldots = \frac{1}{2} + z + z^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+2)!z^n}$.
Ряд сходится при $\left|\frac{1}{z}\right| < \infty$; $|z| < \infty$;
$0 < |z| < \infty$.

№555 $e^{z+\frac{1}{z}}$ в области $0 < |z| < \infty$.

$e^{z+\frac{1}{z}} = e^z e^{\frac{1}{z}} = \left(1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + \ldots\right)\left(1 + \right.$
$\left. + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!z^2} + \frac{1}{3!z^3} + \frac{1}{4!z^4} + \ldots\right) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n z^n + \sum_{n=1}^{\infty} C_{-n} z^{-n}$,
где $C_n = C_{-n} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!(n+k)!}$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$.

Проверим коэффициент при $\frac{1}{z^3}$: $C_{-3} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!(3+k)!}$. С другой стороны, $C_{-3} = \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{2\,5!} + \frac{1}{3!\,6!} + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!(3+k)!}$. Значит, формула в ответе верна. Ряд сходится при $|z| < \infty$ и $\left|\frac{1}{z}\right| < \infty \Rightarrow 0 < |z| < \infty$.

№556 $\sin z \sin\frac{1}{z}$ в области $0<|z|<\infty$.

$$\sin z \sin\frac{1}{z} = \left(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \ldots\right)\left(\frac{1}{z} - \frac{1}{3!\,z^3} + \frac{1}{5!\,z^5} - \frac{1}{7!\,z^7} + \ldots\right) = \sum_{n=0}^{\infty} C_{2n} z^{2n} + \sum_{n=1}^{\infty} C_{-2n} z^{-2n},$$

где $C_{2n} = C_{-2n} = (-1)^n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)!\,(2n+2k+1)!}$ $(n=0,1,2,\ldots)$

Проверим коэффициент при z^2: $C_2 = -\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)!} \cdot \frac{1}{(2k+3)!}$. С другой стороны, $C_2 = -\frac{1}{3!} - \frac{1}{3!\,5!} - \frac{1}{5!\,7!} - \ldots = -\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)!\,(2k+3)!}$. Значит, формула в ответе верна. Ряд сходится при $|z| < \infty$; $\left|\frac{1}{z}\right| < \infty \Rightarrow 0<|z|<\infty$.

16.11. Классификация особых точек с помощью ряда Лорана.

z_0 наз. особой изолир. точкой, если можно указать окрестность т. z_0, где нет других особ. точек. Предельные особ. точки класс-ии не подверг.

ственно особая точка.

г) $z=\infty$. $\sin\frac{1}{1-z} = -\sin\frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{1}{z}} = -\left(\frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{1}{z}} - \right.$

$\left. - \frac{1}{3!z^3\left(1-\frac{1}{z}\right)^3} + \ldots\right) = -\frac{1}{z}\left(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\ldots\right) + \frac{1}{3!z^3}\left(1+\right.$

$\left.+\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\ldots\right)^3 - \ldots$ — нет полож. степеней, устранимая особ. точка. Нуль 1-го порядка.

16.11. Домашняя работа.

№565 3) $z=-1$; $\frac{1}{z-z^3} = \frac{1}{z(1-z)(1+z)} = \frac{1}{z+1}\left(\frac{1}{z}+\frac{1}{1-z}\right) =$

$= \frac{1}{z+1}\left(\frac{1}{z+1-1}+\frac{1}{2-(z+1)}\right) = \frac{1}{z+1}\left(-\frac{1}{1-(z+1)}+\frac{1}{2-(z+1)}\right) =$

$= \frac{1}{z+1}\left(-\left(1+(z+1)+(z+1)^2+\ldots\right)+\frac{1}{2}\left(1+\frac{z+1}{2}+\left(\frac{z+1}{2}\right)^2+\ldots\right)\right)$ — одна отр. степень $(z+1)$ в разложении, значит, это полюс 1-го порядка (простой)

№566 $\frac{z^4}{1+z^4} = \frac{z^4}{(z^4-i^2)} = \frac{z^4}{(z^2-i)(z^2+i)} = \frac{z^4}{\left(z-\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)\left(z+\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)\left(z-\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)\left(z+\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)}$

1) $z=\frac{1+i}{\sqrt{2}}$;

$\frac{z^4}{1+z^4} = \frac{z^4+1-1}{z^4+1} = 1-\frac{1}{z^4+1} = 1-\frac{1}{z-\frac{1+i}{\sqrt{2}}}\cdot\frac{1}{\left(z+\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)\left(z+\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)}$

$\cdot\frac{1}{z-\frac{1-i}{\sqrt{2}}}$. Обозначим $\frac{1+i}{\sqrt{2}}=a$; $\frac{1-i}{\sqrt{2}}=b$, тогда

$$\frac{1}{(z+a)(z-b)(z+b)}=\frac{A}{z+a}+\frac{B}{z-b}+\frac{C}{z+b}=\Big(A(z^2-b^2)+B(z+a)\cdot$$

$$\cdot(z+b)+C\,(z+a)(z-b)\Big)\Big/(z+a)(z-b)(z+b);$$

$$Az^2-Ab^2+B\,(z^2+z(a+b)+ab)+C\,(z^2+(a-b)z-ab)=$$

$$=z^2(A+B+C)+z\big(B(a+b)+C(a-b)\big)-Ab^2+abB-$$

$-abC$. Значит, $\begin{cases} A+B+C=0; \\ B(a+b)+C(a-b)=0; \\ abB-abC-Ab^2=1; \end{cases}$

$$\begin{cases} A+B+C=0; \\ \sqrt{2}B+i\sqrt{2}C=0; \\ B-C+Ai=1; \end{cases} \quad \begin{cases} A=\frac{B}{i}-B; \\ i\sqrt{2}C=-\sqrt{2}B; \\ B+\frac{B}{i}+B-Bi=1; \end{cases} \quad \begin{cases} B\left(2+\frac{1}{i}-i\right)=1; \\ C=-\frac{B}{i}; \\ A=\frac{B}{i}-B; \end{cases}$$

$$2B(1-i)=1; \qquad B=\frac{1}{2(1-i)}=\frac{1+i}{2\cdot 2}=\frac{1+i}{4}$$

$$C=Bi=\frac{i-1}{4}; \quad A=B\left(\frac{1}{i}-1\right)=B(-i-1)=-B(i+1)=$$

$=-\dfrac{(i+1)^2}{4}=-\dfrac{i}{2}$. Получаем $\dfrac{z^4}{1+z^4}=1-\dfrac{1}{z-\frac{1+i}{\sqrt{2}}}\,\cdot$

$$\cdot\left(\frac{-\frac{i}{2}}{z+\frac{1+i}{\sqrt{2}}}+\frac{\frac{1+i}{4}}{z-\frac{1-i}{\sqrt{2}}}+\frac{\frac{i-1}{4}}{z+\frac{1-i}{\sqrt{2}}}\right)=1-\frac{1}{z-\frac{1+i}{\sqrt{2}}}\left(-\frac{i}{2}\,\cdot\right.$$

$$\left.\cdot\frac{1}{\frac{2(1+i)}{\sqrt{2}}+\left(z-\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)}+\frac{1+i}{4}\cdot\frac{1}{i\sqrt{2}+\left(z-\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)}+\frac{i-1}{4}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}+\left(z-\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)}\right)=$$

$$=1-\frac{1}{z-\frac{1+i}{\sqrt{2}}}\left(-\frac{\sqrt{2}(i+1)}{8}\cdot\frac{1}{1+\left(\frac{z-\frac{1+i}{\sqrt{2}}}{\frac{2(1+i)}{\sqrt{2}}}\right)}+\frac{1-i}{4\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{1+\left(\frac{z-\frac{1+i}{\sqrt{2}}}{i\sqrt{2}}\right)}+\right.$$

$$\left.+\frac{i-1}{4\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{1+\left(\frac{z-\frac{1+i}{\sqrt{2}}}{\sqrt{2}}\right)}\right)=1-\frac{1}{z-\frac{1+i}{\sqrt{2}}}\left(-\frac{\sqrt{2}(i+1)}{8}\left(1-\frac{z-\frac{1+i}{\sqrt{2}}}{\sqrt{2}(1+i)}\right.\right.$$

$$+\left(\frac{z-\frac{1+i}{\sqrt2}}{\sqrt2(1+i)}\right)^2-\dots\Big)+\frac{1-i}{4\sqrt2}\left(1-\frac{z-\frac{1+i}{\sqrt2}}{i\sqrt2}+\left(\frac{z-\frac{1+i}{\sqrt2}}{i\sqrt2}\right)^2-\dots\right)+$$

$$+\frac{i-1}{4\sqrt2}\left(1-\frac{z-\frac{1+i}{\sqrt2}}{\sqrt2}+\left(\frac{z-\frac{1+i}{\sqrt2}}{\sqrt2}\right)^2-\dots\right)$$ – только одна отр. степень $\left(z-\frac{1+i}{\sqrt2}\right)$ => эта точка – простой полюс. Точки $z=-\frac{1+i}{\sqrt2};\ \frac{1-i}{\sqrt2};\ -\frac{1-i}{\sqrt2}$ – также простые полюса, по аналогии.

г) $z=\infty$; $\frac{z^4}{1+z^4}=z^4\cdot\frac{1}{z^4+1}=\frac{1}{1+\frac{1}{z^4}}=\left(1-\frac{1}{z^4}+\frac{1}{z^8}-\dots\right)$ – нет полож. степеней. Значит, это устранимая особая точка.

№ 567 $\frac{z^5}{(1-z)^2}$;

1) $z=1$; $\frac{z^5}{(1-z)^2}=\frac{1}{(z-1)^2}\cdot z^5=\frac{z^5}{(z-1)^2}=z^4\frac{z}{(z-1)^2}=$

$$=(z^4-1+1)\frac{z-1+1}{(z-1)^2}=\left((z^2-1)(z^2+1)+1\right)\left(\frac{1}{z-1}+\frac{1}{(z-1)^2}\right)=$$

$$=\left((z-1)(z+1)(z-i)(z+i)+1\right)\left(\frac{1}{z-1}+\frac{1}{(z-1)^2}\right)=\Big((z-1)2\left(1+\frac{z-1}{2}\right)\cdot$$

$$\cdot(1-i)\left(1+\frac{z-1}{1-i}\right)(i+1)\left(1+\frac{z-1}{1+i}\right)+1\Big)\left(\frac{1}{z-1}+\frac{1}{(z-1)^2}\right)=$$

$$=\cancel{4(z-1)}\ 4\left(1+\frac{z-1}{2}\right)\left(1+\frac{z-1}{1-i}\right)\left(1+\frac{z-1}{1+i}\right)+\frac{1}{z-1}+$$

$$+\frac{4}{z-1}\left(1+\frac{z-1}{2}\right)\left(1+\frac{z-1}{1-i}\right)\left(1+\frac{z-1}{1+i}\right)+\frac{1}{(z-1)^2}$$ – 2 отр. степени $(z-1)$ => эта точка – полюс 2-го порядка.

2) $z=\infty$; $\frac{z^5}{(1-z)^2}$ $z^5(1-z)^{-2} = z^5(1+$

$+2z+\dots) = \frac{z^3}{(\frac{1}{z}-1)^2} = z^3(1-\frac{1}{z})^{-2} = z^3(1+\frac{2}{z}+$

$+\frac{(-2)(-3)}{2!\,z^2}+\dots)$ – 3 полож. степени z =>

Эта точка – полюс 3-го порядка.

№569 б) $z=-i$; $\frac{e^z}{1+z^2} = \frac{e^{z+i}e^{-i}}{(i+z)(z-i)} = \frac{e^{-i}}{z+i}\, e^{z+i}\cdot$

$\cdot\frac{1}{-1+\frac{z+i}{2i}}\cdot\frac{1}{2i} = -\frac{e^{-i}}{2i}\cdot\frac{1}{z+i}\left(1+z+i+\frac{(z+i)^2}{2!}+\dots\right)\cdot$

$\cdot\left(1+\frac{z+i}{2i}+\left(\frac{z+i}{2i}\right)^2+\dots\right)$ – только одна отр. степень $(z+i)$ => эта точка – прост. полюс.

$\boxed{23.11}$

Вычеты в особых точках.

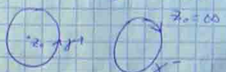
621, 23, 26, 29, 32, 38, 42/624, 28, 34, 39, 43, 47

аналитич.

Вычет $\text{Выч}[f(z), z_0] = \frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma f(z)\,dz$. Обход по γ

изолир.

берется так, чтобы область с z_0 оставалась слева. Внутри контура – только одна изол. точка. Контур любой.



$\text{Выч}[f(z), z_0] = C_{-1}$; $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} C_n(z-z_0)^n+\frac{C_{-1}}{z-z_0}+$

$+\frac{C_{-2}}{(z-z_0)^2}+\dots$ $C_n=\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma^+}\frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\,dz$. При $n=-1$,

$C_{-1}=\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma^+} f(z)\,dz$. Если $z=\infty$, то $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} C_n\cdot$

№549 $\sqrt{(z-a)(z-b)} = \pm z\left(1-\frac{a}{z}\right)^{\frac{1}{2}}\left(1-\frac{b}{z}\right)^{\frac{1}{2}}$

26.10. Домашняя работа.

№452 $\operatorname{ch} z = \frac{1}{2}(e^z + e^{-z}) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \ldots + \frac{z^n}{n!} + \ldots + 1 - \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} - \frac{z^3}{3!} + \ldots + (-1)^{n} \frac{z^n}{n!} + \ldots\right) =$

$= 1 + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \ldots + \frac{z^{2n}}{(2n)!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!}$. Сходится при $|z| < +\infty$ как суперпозиция рядов, сходящихся при $|z| < +\infty$.

№455 $\operatorname{ch}^2 z = \frac{1}{4}(e^z + e^{-z})^2 = \frac{1}{4}(e^{2z} + 2 + e^{-2z}) =$

$= \frac{1}{4}\left(1 + \frac{2z}{1!} + \frac{(2z)^2}{2!} + \ldots + 2 + 1 - \frac{2z}{1!} + \frac{(2z)^2}{2!} - \ldots\right) =$

$= \frac{1}{4}\left(4 + \frac{2(2z)^2}{2!} + \frac{2(2z)^4}{4!} + \frac{2(2z)^6}{6!} + \ldots\right) = 1 + \frac{(2z)^2}{2\cdot 2!} + \frac{(2z)^4}{2\cdot 4!} + \ldots) = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2z)^{2n}}{(2n)!} + 1 = \frac{1}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{2n-1} z^{2n}}{(2n)!}$.

Сходится при $|z| < +\infty$ как суперпозиция: $|2z| < +\infty \Rightarrow |z| < +\infty$ и $|-2z| < +\infty \Rightarrow |z| < +\infty$.

№454 $\sin^2 z = \left(\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}\right)^2 = -\frac{1}{4}(e^{2iz} - 2 + e^{-2iz}) =$

$= -\frac{1}{4}\left(-2 + 1 + \frac{2iz}{1!} + \frac{(2iz)^2}{2!} + \frac{(2iz)^3}{3!} + \ldots + 1 - \frac{2iz}{1!} + \frac{(2iz)^2}{2!} - \frac{(2iz)^3}{3!} + \ldots\right) = -\frac{1}{4}\left(\frac{2\cdot 2^2 \cdot i^2 z^2}{2!} + \frac{2\cdot 2^4 \cdot i^4 z^4}{4!} + \ldots\right) =$

$= + \frac{2z^2}{2!} - \frac{2^3 z^4}{4!} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{2^{2n-1} z^{2n}}{(2n)!}$. Видимо, в ответе неправильно выставлен нижний предел у суммы. Исправлено.

№456 $(a+z)^{\alpha}$ $(a^{\alpha}=e^{\alpha \ln a})$;

$$(a+z)^{\alpha}=a^{\alpha}\left(1+\frac{z}{a}\right)^{\alpha}=a^{\alpha}\left(1+\binom{\alpha}{1}\frac{z}{a}+\binom{\alpha}{2}\frac{z^2}{a^2}+\right.$$

$$\left.+\ldots+\binom{\alpha}{n}\left(\frac{z}{a}\right)^n+\ldots\right), \text{ где } \binom{\alpha}{n}=\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}=C_n^{\alpha}.$$

Сход. при $\left|\frac{z}{a}\right|<1$, $|z|<|a|$. Иначе записав,

$$(a+z)^{\alpha}=a^{\alpha}\sum_{n=0}^{\alpha}\binom{\alpha}{n}\left(\frac{z}{a}\right)^n, \text{ где } \binom{\alpha}{0}=1.$$

№457 $\sqrt{z+i}$ $\left(\sqrt{i}=\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)$;

$$\sqrt{z+i}=\sqrt{i}\left(1+\frac{z}{i}\right)^{\frac{1}{2}}=\frac{1+i}{\sqrt{2}}\left(1+\frac{\frac{1}{2}\frac{z}{i}}{1!}+\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{z}{i}\right)^2}{2!}+\right.$$

$$+\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)}{3!}\left(\frac{z}{i}\right)^3+\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)\left(\frac{1}{2}-3\right)}{4!}\left(\frac{z}{i}\right)^4+$$

$$\left.+\ldots\right)=\frac{1+i}{\sqrt{2}}\left(1+\frac{z}{2i}+\frac{\left(-\frac{1}{4}\right)\frac{z^2}{(-1)}}{\cancel{2!}\,2}+\frac{\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)z^3}{3!\,(-i)}+\right.$$

$$\left.+\frac{\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{5}{2}\right)z^4}{4!}+\ldots\right)=\frac{1+i}{\sqrt{2}}\left(1+\frac{z}{2i}+\frac{\left(\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)}{1\cdot 2}\left(\frac{z}{i}\right)^2+\right.$$

$$\left.+\frac{\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)}{1\cdot 2\cdot 3}\left(\frac{z}{i}\right)^3+\frac{\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{5}{2}\right)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\left(\frac{z}{i}\right)^4+\ldots\right)=$$

$$=\frac{1+i}{\sqrt{2}}\left(1+\frac{z}{2i}+\frac{1\cdot(-1)}{2!\,2^2}\left(\frac{z}{i}\right)^2+\frac{1\cdot(-1)(-3)}{3!\,2^3}\left(\frac{z}{i}\right)^3+\right.$$

$$\left.+\frac{1(-1)(-3)(-5)}{4!\,2^4}\left(\frac{z}{i}\right)^4+\ldots\right)=\frac{1+i}{\sqrt{2}}\left(1+\frac{z}{2i}+\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n-1}\cdot\right.$$

$$\left.\cdot\frac{1\cdot 3\cdots(2n-3)}{2\cdot 4\cdots(2n)}\left(\frac{z}{i}\right)^n\right);$$ сходится при $\left|\frac{z}{i}\right|<1$;

$|z|<1$.

№458 $\frac{1}{az+b}$ $(b \neq 0)$;

$\frac{1}{az+b} = \frac{1}{b} \frac{1}{1+\frac{az}{b}} = \frac{1}{b}\left(1 - \frac{az}{b} + \left(\frac{az}{b}\right)^2 - \ldots + (-1)^n\left(\frac{az}{b}\right)^n + \right.$

$\left. + \ldots\right) = \frac{1}{b}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{az}{b}\right)^n$. Сходится при $\left|\frac{az}{b}\right| < 1$;

$\left|\frac{a}{b}\right||z| < 1$; $|z| < \left|\frac{b}{a}\right|$;

№459 $\frac{z}{z^2-4z+13}$. Решен в классе. Откуда берется формула для C_n в ответе? Раскрыли скобки.

№461 $\ln\frac{1+z}{1-z} = \ln(1+z) - \ln(1-z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \ldots -$

$-\left(-z - \frac{z^2}{2} - \frac{z^3}{3} - \ldots\right) = 2z + \frac{2z^3}{3} + \frac{2z^5}{5} + \ldots =$

$= 2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{2n+1}}{2n+1}$. Сходится при $|z| < 1$ как суперп.

сход. при $|z| < 1$ и $|-z| < 1 \Rightarrow |z| < 1$.

№462 $\mathrm{Arctg}\, z$ $(\mathrm{Arctg}\, 0 = 0)$;

$\mathrm{Arctg}\, z = (\text{кл. раз.}) = \frac{1}{2i}\left(iz - \frac{(iz)^2}{2} + \frac{(iz)^3}{3} - \frac{(iz)^4}{4} + \ldots - \right.$

$-\left(-iz - \frac{(-iz)^2}{2} + \frac{(-iz)^3}{3} - \frac{(-iz)^4}{4} + \ldots\right) = \frac{1}{2i}\left(2iz + \frac{2(iz)^3}{3} + \right.$

$\left. + \frac{2(iz)^5}{4} + \ldots\right) = z + \frac{i^2z^3}{3} + \frac{i^4z^5}{5} + \ldots = z - \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} -$

$- \frac{z^7}{7} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{(2n+1)}}{2n+1}$ $|iz| < 1$; $|z| < 1$;

$|-iz| < 1$; $|z| < 1$ $\Rightarrow$ Сходится при $|z| < 1$.

№463 $\mathrm{Arsh}\, z$ $(\mathrm{Arsh}\, 0 = 0)$;

$\mathrm{Arsh}\, z = \mathrm{Ln}(z + \sqrt{z^2+1}) =$ (берем главную ветвь) $=$

$= \ln(z + \sqrt{z^2+1}) = \mathrm{arsh}\, z$;

$(\mathrm{arsh}\, z)' = \frac{1}{\sqrt{1+z^2}} = (1+z^2)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \left(-\frac{1}{2}z^2\right) + \frac{-\frac{1}{2}\left(-\frac{3}{2}\right)}{2}z^4 +$

$$+\frac{-\frac{1}{2}(-\frac{3}{2})(-\frac{5}{2})}{3!}z^6+\frac{-\frac{1}{2}(-\frac{3}{2})(-\frac{5}{2})(-\frac{7}{2})}{4!}z^8+\ldots=$$

$$=1-\frac{z^2}{2}+\frac{3}{2^2\,2!}z^4-\frac{3\cdot 5}{2^3\,3!}z^6+\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2^4\,4!}z^8+\ldots=$$

$$=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2^n\,n!}z^{2n}(-1)^n;$$

$$\operatorname{arsh} z=\int(\operatorname{arsh} z)'\,dz=z+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2^n\,n!\,(2n+1)}z^{2n+1}+$$

$+C$. Но $\operatorname{arsh} z(z=0)=0 \Rightarrow C=0$ и получаем:

$$\operatorname{arsh} z=z+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2^n\,n!\,(2n+1)}z^{2n+1},$$ Ряд для

$(\operatorname{arsh} z)'$ сход. при $|z^2|<1$; $|z|^2<1$; $|z|<1$.

Зн., и ряд для $\operatorname{arsh} z$ сход. при $|z|<1$.

№464 $\ln(z^2-3z+2)$:

$z^2-3z+2=0$; $z_{1,2}=\frac{3\pm\sqrt{9-8}}{2}=\frac{3\pm 1}{2}$; $z_1=2$, $z_2=1$

$z^2-3z+2=(z-1)(z-2)$;

$\ln(z^2-3z+2)=\ln(z-1)+\ln(z-2)=\cancel{\ln(1+(z-2))+\ln(1+(z-3))}=\ln(-1)(1-z)+\ln(-2)(1-\frac{z}{2})=$

$=\ln(1)+\ln(1-z)+\ln(2)+\ln(1-\frac{z}{2})=\ln 2-z-\frac{z^2}{2}-\frac{z^3}{3}-$

$\boxed{\ln|xy|=\ln|x|+\ln|y|}$ $-\ldots-\frac{z}{2}-\frac{z^2}{2^2\cdot 2}-\frac{z^3}{2^3\cdot 3}-\ldots=$

$$=\ln 2-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{2^n n}=\ln 2-\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{2^n}\right)\frac{z^n}{n};$$

Сходится при $|z|<1$ и $|\frac{z}{2}|<1 \Rightarrow |z|<1$ и $|z|<2 \Rightarrow |z|<1$

№465 $\int_0^z e^{z^2}dz=$ $=\int_0^z\left(1+\frac{z^2}{1!}+\frac{z^4}{2!}+\right.$