

## Вопросы к экзамену по Квантовой механике (зима-весна 2006 г)

1. Докажите, что уравнение Шредингера сохраняет плотность вероятности (\*\*\*\*)
2. Докажите, что собственные функции УШ инфинитного движения дважды вырождены (\*\*\*)
3. Докажите, что для свободного движения  $\{\hat{H}\hat{k}\}_- = 0$  (\*\*\*)
4. Докажите, что собственные функции УШ свободного движения, соответствующие разным  $\mathbf{k}$  ортогональны (\*\*\*)
5. Покажите, что для произвольного потенциала  $E > U_{min}$  (\*\*\*)
6. Докажите, что спектр финитного движения дискретен и, что движение с  $E < U_\infty$  финитно. (\*\*\*\*)
7. Докажите, что собственные функции дискретного спектра невырождены (\*\*\*\*)
8. Докажите, что для собственные функции дискретного спектра УШ с четной ямой либо четны, либо нечетны (\*\*\*\*)
9. Найдите собственную функцию УШ с линейным потенциалом  $U = \alpha x$  (Указание: решить в импульсном представлении и потом перейти к координатному) (\*\*\*\*)
10. Определите уровни энергии в симметричной прямоугольной яме конечной глубины. (\*\*\*\*)
11. Выведите граничные условия и определите коэффициент отражения от потенциала  $U = \alpha\delta(x)$ . (\*\*\*\*)
12. Напишите уравнение для собственных функций гармонического осциллятора и приведите его к безразмерному виду (\*\*\*)
13. Найдите собственную функцию основного состояния гармонического осциллятора. Отнормируйте её. (\*\*\*\*)
14. Определите операторы рождения и уничтожения. Напишите гамильтониан гармонического осциллятора. Опишите их свойства. Напишите их явные выражения в координатном представлении. (\*\*\*\*)
15. Напишите (выведите) коммутационные соотношения для  $a, a^+$  гармонического осциллятора. (\*\*\*)

16. Докажите с помощью коммутационных соотношений, что  $\hat{a}|n\rangle \sim |n-1\rangle$  и определите коэффициент пропорциональности (\*\*\*\*)
17. Докажите с помощью коммутационных соотношений, что  $\hat{a}^+|n\rangle \sim |n+1\rangle$  и определите коэффициент пропорциональности (\*\*\*\*)
18. Решая уравнение  $a|0\rangle = 0$  в координатном представлении найдите собственную функцию основного состояния. (\*\*\*\*)
19. Найдите матричные элементы оператора  $\langle n|a|m\rangle$  гармонического осциллятора (\*\*\*)
20. Найдите матричные элементы  $\langle n|a^+|m\rangle$  гармонического осциллятора (\*\*\*)
21. Найдите матричные элементы  $\langle n|x|m\rangle$  гармонического осциллятора (\*\*\*\*)
22. Найдите матричные элементы  $\langle n|p|m\rangle$  гармонического осциллятора (\*\*\*\*)
23. Докажите, что  $|n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}}(a^+)^n|0\rangle$  гармонического осциллятора (\*\*\*\*)
24. Используя формулу  $|n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}}(a^+)^n|0\rangle$  и явное выражение для  $a^+$  и  $\psi_0(x) = \langle x|0\rangle$  определите нормированную функцию  $\psi_1(x)$  гармонического осциллятора (\*\*\*)
25. Используя операторы  $a, a^+$  вычислите матричные элементы операторов  $x^2, p^2$  в базисе собственных функций гармонического осциллятора (\*\*\*\*)
26. Используя операторы  $a, a^+$  вычислите средние (диагональные матричные элементы в базисе собственных функций гармонического осциллятора) операторов  $x^3, x^4$  (\*\*\*\*)
27. Используя операторы  $a, a^+$  вычислите средние (диагональные матричные элементы в базисе собственных функций гармонического осциллятора) операторов  $p^3, p^4$  (\*\*\*\*)
28. Как преобразуются координаты при инфинитезимальном (бесконечно малом) вращении (\*\*\*)
29. Связь оператора момента и вращения. Определение оператора момента. (\*\*\*)
30. Выведите коммутационные соотношения между компонентами момента (\*\*\*\*)
31. Выведите коммутационные соотношения между проекциями момента и координатами (\*\*\*\*)
32. Выведите коммутационные соотношения между проекциями момента и импульсами (\*\*\*\*)
33. Выведите коммутационные соотношения между проекциями момента и квадратом момента (\*\*\*\*)
34. Определение операторов  $l_{\pm}$ . Выведите коммутационные соотношения между  $l_{\pm}, l_z$  (\*\*\*\*)
35. Как выбираются базисные функции  $|l, m\rangle$  (\*\*\*)

36. Получите явное выражение для оператора  $l_z$  в сферических координатах (\*\*\*\*)
37. Получите явное выражение для оператора  $l_x$  в сферических координатах (\*\*\*\*)
38. Получите явное выражение для оператора  $l_y$  в сферических координатах (\*\*\*\*)
39. Получите явное выражение для оператора  $l_+$  в сферических координатах (\*\*\*\*)
40. Получите явное выражение для оператора  $l_-$  в сферических координатах (\*\*\*\*)
41. Получите явное выражение для оператора  $\mathbf{I}^2$  в сферических координатах (\*\*\*\*)
42. Найдите зависимость от  $\varphi$  функции  $\langle \theta, \varphi | l, m \rangle$  и докажите, что  $m$  целое (\*\*\*)
43. Докажите с помощью коммутационных соотношений, что  $l_+ |l, m\rangle \sim |l, m + 1\rangle$  (\*\*\*\*)
44. Докажите с помощью коммутационных соотношений, что  $l_- |l, m\rangle \sim |l, m - 1\rangle$  (\*\*\*\*)
45. Докажите, что существует  $max m = l$  так, что  $l_+ |l, l\rangle = 0$  и существует  $2l + 1$  функций  $|l, m\rangle$ . (\*\*\*)
46. Чему равняется  $l_- |l, -l\rangle$  (\*\*\*)
47. С помощью коммутационных соотношений найдите собственные числа оператора  $\mathbf{I}^2$  (\*\*\*\*)
48. С помощью коммутационных соотношений найдите матричные элементы операторов  $l_{\pm}, l_z$  (\*\*\*\*)
49. Напишите матрицу  $l_z$  для  $l = 1$  (\*\*\*)
50. Напишите матрицу  $l_+$  для  $l = 1$  (\*\*\*\*)
51. Напишите матрицу  $l_-$  для  $l = 1$  (\*\*\*\*)
52. Напишите матрицу  $l_x$  для  $l = 1$  (\*\*\*\*)
53. Напишите матрицу  $l_y$  для  $l = 1$  (\*\*\*\*)
54. Напишите матрицу  $\mathbf{I}^2$  для  $l = 1$  (\*\*\*)
55. Напишите собственные функции  $|l, m\rangle$  для различных  $m$  и  $l = 1$  в  $l^2, l_z$  представлении (\*\*\*)
56. Собственные функции момента в сферических координатах  $\langle \theta, \varphi | l, m \rangle = Y_{l,m}(\theta, \varphi)$ . Напишите уравнение и его решение методом разделения переменных. Выражение через присоединенные полиномы Лежандра. (\*\*\*\*)
57. С помощью явного выражения для  $l_+$  найдите  $Y_{l,l}(\theta, \varphi)$  (\*\*\*\*)
58. Четность состояния, оператор инверсии. Скаляры и псевдоскаляры, полярные и аксиальные векторы. Примеры. (\*\*\*)

59. Преобразование инверсии в сферических координатах. Связь четности с орбитальным моментом. (\*\*\*\*)
60. Сведите задачу двух тел, взаимодействующих по закону  $U(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|)$  к задаче движения одной частицы в центральном поле. (\*\*\*)
61. Разделите переменные УШ для центрального поля и напишите общее решение. Напишите условие ортонормированности. Сколько квантовых чисел и каких образуют полный набор. (\*\*\*)
62. Докажите, что если  $\lim_{r \rightarrow 0} U(r)r^2 = 0$ , то  $R(r) \sim r^l$  при  $r \rightarrow 0$  (\*\*\*\*)
63. Определите асимптотики радиальных функций при  $r \rightarrow \infty$  (\*\*\*)
64. Определите уровни энергии частицы с моментом  $l = 0$ , движущейся в сферической прямоугольной яме конечной глубины. Определите минимальную глубину ямы, необходимую для существования связанного состояния. (\*\*\*\*)
65. Определите уровни энергии и волновые функции сферического гармонического осциллятора путем разделения переменных в декартовых координатах. Каковы квантовые числа. Определите степень вырождения уровней. (\*\*\*\*)
66. Напишите УШ для движения в кулоновом поле и приведите его к безразмерному виду. Атомная система единиц. (\*\*\*)
67. Определите асимптотику радиальной функции движения в кулоновом поле при  $r \rightarrow \infty$  (\*\*\*)
68. Какова степень вырождения уровней при движении в кулоновом поле (\*\*\*\*)
69. Выведите формулу для первой поправки  $\psi_n^1$  к волновой функции, соответствующей энергии  $E_n$  (\*\*\*)
70. Выведите формулу для первой  $E_n^1$  и второй  $E_n^2$  поправок к энергии. (\*\*\*\*)
71. Используя теорию возмущений найдите первую поправку к частоте  $\omega_n$  гармонического осциллятора из-за возмущения  $V = \alpha x^4$ . Используйте операторы рождения и уничтожения (\*\*\*\*)
72. Используя теорию возмущений найдите первую поправку к частоте  $\omega_n$  гармонического осциллятора из-за возмущения  $V = \alpha p^4$ . Используйте операторы рождения и уничтожения (\*\*\*\*)
73. Используя теорию возмущений найдите первую поправку к частоте  $\omega_n$  гармонического осциллятора из-за возмущения  $V = \alpha p^2 x^2 + x^2 p^2$ . Используйте операторы рождения и уничтожения (\*\*\*\*)
74. Используя теорию возмущений найдите первую поправку к частоте  $\omega_n$  гармонического осциллятора из-за возмущения  $V = \alpha r x^2 p$ . Используйте операторы рождения и уничтожения (\*\*\*\*)

75. Используя теорию возмущений найдите первую поправку к частоте  $\omega_n$  гармонического осциллятора из-за возмущения  $V = \alpha xp^2x$  Используйте операторы рождения и уничтожения (\*\*\*\*)
76. Выведите формулу для поправки к энергии  $E_n^0$  в случае  $m$  кратного вырождения этого уровня. Секулярное уравнение (\*\*\*\*)
77. Выведите формулу для поправки к энергии  $E_n^0$  в случае 2 кратного вырождения этого уровня. Определите правильные волновые функции нулевого приближения (\*\*\*\*)
78. Получите нестационарное уравнение Шредингера в представлении собственных функций невозмущенного гамильтониана. (\*\*\*)
79. Выведите формулу для первой поправки к волновой функции системы при произвольном нестационарном возмущении (\*\*\*)
80. Выведите формулу для первой поправки к волновой функции системы при гармоническом нерезонансном возмущении. (\*\*\*\*)
81. Выведите формулу для вероятности перехода при резонансном воздействии. Золотое правило Ферми. (\*\*\*)
82. Выведите формулу главного члена квазиклассического асимптотического разложения. (\*\*\*)
83. Напишите локальные условия применимости квазиклассического приближения. (\*\*\*)
84. Напишите квазиклассическое решение для УШ, описывающего движение в однородном поле слева и справа от точки поворота. (\*\*\*)
85. Методом Цвана выведите граничные условия для перехода из полубесконечной классически запрещенной области в классически разрешенную. Каков набег фазы при отражении? (\*\*\*\*)
86. В квазиклассическом приближении определите уровни энергии в потенциальной яме. Правило квантование Бора-Зоммерфельда. (\*\*\*\*)
87. С помощью правила квантования Бора-Зоммерфельда определите уровни энергии гармонического осциллятора. Сравнить с точным решением. (\*\*\*)
88. Методом Цвана выведите граничные условия для перехода из полубесконечной классически разрешенной области в классически запрещенную. (\*\*\*\*)
89. Понятие спина. Спиновая переменная. Аналог поляризации электромагнитных волн. Опыт Штерна-Герлаха. (\*\*\*)
90. Инфинитезимальное преобразование вращения и оператор спина. На какие переменные действует оператор спина. (\*\*\*)

91. Напишите коммутационные соотношения для операторов спина  $s_x, s_y, s_z$ . (\*\*\*)
92. Докажите, что оператор  $\mathbf{s}^2$  коммутирует с операторами проекций спина. (\*\*\*\*)
93. Что такое  $s^2, s_z$  представление. (\*\*\*)
94. Определение операторов  $s_{\pm}$ . Выведите коммутационные соотношения для  $s_{\pm}, s_z$ .(\*\*\*\*)
95. Докажите с помощью коммутационных соотношений, что  $s_+|s, \sigma\rangle \sim |s, \sigma + 1\rangle$  (\*\*\*\*)
96. Докажите с помощью коммутационных соотношений, что  $s_-|s, \sigma\rangle \sim |s, \sigma - 1\rangle$  (\*\*\*\*)
97. Докажите, что существует  $max\sigma = s$  так, что  $s_+|s, s\rangle = 0$  и существует  $2s+1$  функций  $|s, \sigma\rangle$ . Докажите, что  $2s + 1$  целое. (\*\*\*)
98. Чему равняется  $s_-|s, -s\rangle$  (\*\*\*)
99. С помощью коммутационных соотношений найдите собственные числа оператора  $\mathbf{s}^2$ (\*\*\*\*)
100. С помощью коммутационных соотношений найдите матричные элементы операторов  $s_{\pm}, s_z$ (\*\*\*\*)
101. Напишите матрицы  $s_z, s_{\pm}, s_{x,y,z}$  для  $s = 1/2$ (\*\*\*)
102. Напишите матрицы Паули. (\*\*\*\*)
103. Напишите матрицу  $\mathbf{s}^2$  для  $s = 1/2$  (\*\*\*)
104. Напишите собственные функции операторов  $s_{x,y,z}$  для  $s = 1/2$  в  $s^2, s_z$  представлении (\*\*\*\*)
105. Прямым вычислением докажите антикоммутируемость матриц Паули. (\*\*\*)
106. Докажите, что справедливы соотношения  $\sigma_x^2 = \sigma_y^2 = \sigma_z^2 = 1$  и  $\sigma_y\sigma_z = i\sigma_x$  и все остальные, получающиеся циклической перестановкой  $x, y, z$  (\*\*\*\*)
107. Напишите матрицы конечных вращений  $U_{x,y,z}$
108. На прибор Штерна-Герлаха с собственной осью  $z$  падает пучок, поляризованный по  $x$ . Что на выходе?(\*\*\*\*)
109. На прибор Штерна-Герлаха с собственной осью  $z$  падает пучок, поляризованный по  $y$ . Что на выходе? (\*\*\*\*)
110. На прибор Штерна-Герлаха вдоль оси  $x$  падает пучок, поляризованный по  $z$  Что на выходе, если ось прибора  $z'$  повернута относительно оси  $x$  на угол  $\varphi$ ? (\*\*\*\*)
111. На прибор Штерна-Герлаха вдоль оси  $x$  падает пучок, поляризованный по  $z$  Что на выходе, если ось прибора  $z'$  повернута относительно оси  $y$  на угол  $\varphi$ ? (\*\*\*\*)
112. Напишите УШ бесспиновой заряженной частицы в магнитном поле (\*\*\*)

113. Напишите УШ заряженной частицы со спином  $1/2$  в магнитном поле (\*\*\*)
114. Опишите связь спина и магнитного момента частицы. Что такое гиромагнитное отношение, магнетон Бора, ядерный магнетон. Чему равно гиромагнитное отношение электрона. (\*\*\*)
115. Роль потенциалов в квантовой механике. Калибровочная инвариантность. Удлиненные производные (\*\*\*\*)
116. Напишите выражения для операторов компонент скоростей и получите коммутационные соотношения для них при  $B \neq 0$  (\*\*\*\*)
117. Напишите уравнения движения электрона  $s = 1/2, g = 2$  в однородном магнитном поле в калибровке Ландау. (\*\*\*)
118. Приведите УШ электрона в магнитном поле к безразмерному виду. Магнитная длина. (\*\*\*\*)
119. Выведите волновые функции и значения энергии электрона в магнитном поле. Какими квантовыми числами характеризуется состояние. Уровни Ландау. (\*\*\*\*)