

доч, приведенных для самостоятельной работы.

4.2. Задания, выполняемые в лаборатории:

1. Решить задачу, предложенную преподавателем.

Отчет по данной работе не составляется.

4.3. Задачи для самостоятельного решения:

Методом Ван-дер-Поля найти зависимость амплитуды колебаний от параметра  $\alpha$  и частоту колебаний для систем, описываемых следующими уравнениями:

1.  $\ddot{x} + x = -Mx^3$ ,

2.  $\ddot{x} + x = M(x^3 - \alpha x^5)$

3.  $\ddot{x} + x = M(4x^3 - x^5)$ ,

4.  $\ddot{x} + x = M(x^5 + x^3)$ ,

5.  $\ddot{x} + x = \begin{cases} 1 & \text{при } x \leq 1 \\ 0 & \text{при } x > 1 \end{cases}$

6.  $\ddot{x} + x = \begin{cases} x & \text{при } x \leq 1 \\ 0 & \text{при } x > 1 \end{cases}$

7.  $\ddot{x} + x = -M \frac{d}{dt} (x - \alpha x + x^3)$

8.  $\ddot{x} + x = -M \frac{d}{dt} (-x + \beta x^3)$

9.  $\ddot{x} + x = M \frac{d}{dt} (x + x^3 - \beta x^5)$

10.  $\ddot{x} + x = M(\alpha \dot{x} - x^2 \dot{x})$

11.  $\ddot{x} + x = M(\alpha \dot{x} - \dot{x}^3)$

12.  $\ddot{x} + x = M \frac{d}{dt} (x - \alpha \dot{x})$

13.  $\ddot{x} + x = M(\dot{x} - \alpha \dot{x}^3)$

14.  $\ddot{x} + x = M \frac{d}{dt} (x - x^3) - M \alpha x^3$

15.  $\ddot{x} + x = -M \alpha \dot{x} - M x^3$

16.  $\ddot{x} + x = -M \frac{d}{dt} (x - x^3 + \alpha x^5)$

17.  $\ddot{x} + x = -M[\dot{x} - \alpha(\dot{x} - \dot{x}^3)]$

18.  $\ddot{x} + x = -M \frac{d}{dt} [x - \alpha f(x)]$  где  $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq 1 \\ 1 & \text{при } x > 1 \end{cases}$

387/КТК

МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО СПЕЦИАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ РСФСР  
ГОРЬКОВСКИЙ ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ  
УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ И.И.ЛЮБАЧЕВСКОГО

Радиофизический факультет  
Кафедра теории колебаний

МЕТОДИЧЕСКОЕ УКАЗАНИЕ  
к лабораторному практикуму

тема: "Метод Ван-дер-Поля"

Горький 1963 г.

# 1. ЦЕЛЬ РАБОТЫ

Знакомство с одним из асимптотических методов исследования слабонелинейных систем, близких к гармоническому осциллятору.

# 2. ПОЯСНЕНИЯ К РАБОТЕ

2.1. Основные положения метода медленно меняющихся амплитуд

Слабонелинейные квазиконсервативные системы могут совершать периодические движения с постоянной амплитудой, определяемой своими системами. Таким периодическим движениям на фазовой плоскости соответствуют изолированные замкнутые фазовые траектории, называемые предельными циклами.

Предельный цикл будет устойчивым, если все фазовые траектории, начинающиеся в малой окрестности предельного цикла, будут асимптотически к нему приближаться при  $t \rightarrow \infty$ .

Динамические системы, в фазовом портрете которых имеется, по крайней мере, один устойчивый предельный цикл, называются автоколебательными.

В данном пособии предлагаются основы одного из методов исследования автоколебательных систем, совершающих почти синусоидальные колебания, - метода медленно-меняющихся амплитуд или метода Ван-дер-Поля.

Будем считать, что система описывается уравнением вида

$$\ddot{x} + x = \mu f(x, \dot{x}), \quad (1)$$

где  $f(x, \dot{x})$  - нелинейная ограниченная функция,  $\mu$  - малый безразмерный параметр.

Нас интересуют периодические решения.

Метод Ван-дер-Поля сводит к несравненно более простой задаче нахождения стационарного равновесия так называемых укороченных уравнений.

Перейдем к составлению укороченных уравнений интересующей нас системы (1). При  $\mu = 0$  уравнение (1) описывает обычный гармонический осциллятор, и его решение можно записать в виде

$$x = A \cos(t + \varphi) = A \cos \theta, \quad (2)$$

$$\dot{x} = y = -A \sin(t + \varphi) = -A \sin \theta.$$

## АННОТАЦИЯ

В работе рассмотрен метод Ван-дер-Поля, который позволяет исследовать слабонелинейные, близкие к консервативным системы путем анализа укороченных уравнений.

Даны примеры и набор задач для индивидуальной работы студентов.

Составители: доцент Мельникова Валентина Алексеевна  
ассистент Мотова Марина Ильинична

Подл. к печ. 04.06.83г. Форм. бум. 60x90/16. Бумага  
писчая. Печать офсетная. Усл. печ. л. 5л. Уч. изд. 1,0л.  
Время к. 32г. Тираж 150 экз. Брошюрован.  
Лаборатория множит. тех-ки ГТУ Горький, пр. Гагарина-23

где  $A$  и  $\varphi$  - произвольные постоянные, имеющие физический смысл амплитуд и фазы колебаний.

Решение можно представить и в комплексной форме в виде

$$x = z e^{jt} + z^* e^{-jt} \tag{3}$$

$$x = y = j(z e^{jt} - z^* e^{-jt})$$

где  $Z$  и  $Z^*$  - произвольные постоянные, являющиеся комплексной и комплексно сопряженной амплитудами.

Решение вида (3) легко сводится к виду (2), если положить

$$z = \rho e^{j\varphi}, \quad z^* = \rho e^{-j\varphi}$$

В результате получим

$$x = \rho (e^{j(t+\varphi)} + e^{-j(t+\varphi)}) = 2\rho \cos(t+\varphi)$$

$$y = \rho (e^{j(t+\varphi)} - e^{-j(t+\varphi)}) = 2\rho \sin(t+\varphi)$$

Следовательно

$$|z| = |z^*| = \rho = \frac{A}{2}$$

$$\arg z = -\arg z^* = +\varphi$$

Будем исходить из решения вида (2).

При  $M=0$ , но сколь угодно малом, решение уравнения (1) не должно существенно отличаться от решения для линейного осциллятора, поэтому будем опять его искать в виде (2), считая теперь  $A$  и  $\varphi$  не постоянными величинами, а некоторыми неизвестными функциями времени.

Найдем теперь уравнения, которым удовлетворяют наши новые переменные  $A$  и  $\varphi$ . Продифференцируем в начале первое из уравнений (2) по времени, входящему как явно (в аргумент тригонометрической функции), так и неявно (новые переменные  $A$  и  $\varphi$  зависят от времени) и учтем второе уравнение системы (2):

$$\dot{x} = \dot{A} \cos \theta - A(1 + \dot{\varphi}) \sin \theta = -A \dot{\varphi} \sin \theta, \quad \theta = t + \varphi$$

Откуда следует  $\dot{A} \cos \theta - A \dot{\varphi} \sin \theta = 0$ .

Подставляя решение (2) в уравнение (1), будем иметь

$$\dot{A} \sin \theta + A \dot{\varphi} \cos \theta = -M f(A \cos \theta, -A \sin \theta)$$

Разрешая два последних уравнения относительно  $\dot{A}$  и  $\dot{\varphi}$ , получаем систему

$$\dot{A} = -M f(A \cos \theta, -A \sin \theta) \sin \theta$$

$$A \dot{\varphi} = -M f(A \cos \theta, -A \sin \theta) \cos \theta \tag{5}$$

адекватное уравнение (1), но записанное в других переменных, называемых переменными Ван-дер-Поля. Полученная система не является более простой по сравнению с уравнением (1). Однако, если учесть, что  $M \ll 1$ , то из нее можно получить приближенную, значительно более простую систему.

Правая часть систем (5) является периодической функцией явного входящего времени  $t = \theta - \varphi$  и зависит от  $A$  и  $\varphi$ . Поскольку  $A$  и  $\varphi$  являются медленно меняющимися функциями времени  $t$  (а  $A$  и  $\varphi$  - порядка  $M$ ), то можно их считать постоянными на периоде быстрых осцилляций. Воспользуемся этим и проинтегрировав уравнение, определим средние значения за период  $T = 2\pi$ . Заметим, что интегрирование можно проводить не по времени, а по  $\theta = t + \varphi$ . В результате получим систему

$$\frac{dA}{dt} = -\frac{M}{2\pi} \int_{\theta}^{\theta+2\pi} f(A \cos \theta, -A \sin \theta) \sin \theta d\theta$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = -\frac{M}{2\pi A} \int_{\theta}^{\theta+2\pi} f(A \cos \theta, -A \sin \theta) \cos \theta d\theta \tag{6}$$

Запишем ее в виде

$$\frac{dA}{dt} = M \Phi(A), \quad \frac{d\varphi}{dt} = M \Psi(A) \tag{7}$$

где  $\Phi(A)$  и  $\Psi(A)$  - средние за период значения периодических

х) Отметим, что медленность изменения  $A$  и  $\varphi$  не предполагает, что медленность изменения  $A$  и  $\varphi$  не предполагается заранее. Это получилось автоматически из-за малости величины  $M$ . В этом отличие метода Ван-дер-Поля от других асимптотических методов.

$$-f(A \cos \theta, -A \sin \theta) \sin \theta, -\frac{1}{A} f(A \cos \theta, -A \sin \theta) \cos \theta$$

зависящие только от  $A$ .

Полученные уравнения (3) и называются системой укороченных или усредненных уравнений  $x$ . Согласно решению (2) эта система определяет амплитуду  $A$  и фазу  $\varphi$  квазигармонических колебаний исходной системы, описываемой уравнением (1). Решения полученной системы укороченных уравнений (7) аппроксимируют при достаточно малых  $\mu$  решения полной системы (5), которая эквивалентна исходному уравнению (1). Поэтому, если мы найдем решения укороченных уравнений, то с помощью соотношения (2) мы получим приближенные решения исходной системы. В частности, состояния равновесия укороченных уравнений  $A = A_0, \varphi = \varphi_0$  соответствуют синусоидальным периодическим решениям исходного уравнения (1).

Проведем исследование системы укороченных уравнений для некоторых частных случаев.

1. Пусть  $\psi(A) = 0$ .

Этот случай довольно часто встречается на практике, например, при рассмотрении режимов работы ламповых генераторов без учета сеточных токов.

Тогда система укороченных уравнений (7) принимает вид:

$$\frac{dA}{dt} = \mu \Phi(A), \quad (8) \quad \varphi = \varphi_0 = \text{const.}$$

Рассмотрим первое уравнение, которое может исследоваться независимо от второго, т.к. оно зависит только от  $A$ . Найдем состояния равновесия на фазовой прямой  $A$ . Координаты этих состояний равновесия  $A_0$  есть корни уравнения:

$$\Phi(A_0) = 0. \quad (9)$$

Заметим, что решение исходного уравнения (1) можно было бы искать в виде:

$$x = A \sin(t + \varphi), \quad y = A \cos(t + \varphi)$$

что эквивалентно принятой форме решения (2), т.к. отличается только начальным значением фазы. Однако, надо иметь в виду, что вид укороченных уравнений будет отличаться от вида (7). Предлагается вывести их самостоятельно.

При этом характеристическое уравнение имеет вид  $\rho - \mu \Phi'_A(A_0) = 0$  и состояние равновесия будет устойчивым, если

$$\frac{d\Phi}{dA} \approx \Phi'_A(A_0) < 0$$

и неустойчивым при выполнении обратного неравенства.

Нетрудно представить себе картину фазовых траекторий на плоскости переменных Ван-дер-Поля для системы (8) ( $A$  и  $\varphi$  - полярные координаты). Все интегральные кривые суть прямые, проходящие через начало координат и наклоненные под всевозможными углами  $\varphi = \text{const}$ . Закон движения вдоль каждой из прямых одинаков и определяется первым уравнением системы (7). Корни уравнения (9) определяют радиусы окружностей, каждая точка которых соответствует различным значениям фазы. На рис. 1 приведено разбиение на траектории плоскости переменных Ван-дер-Поля для случая трех состояний равновесия укороченного уравнения (8).

(A, φ)

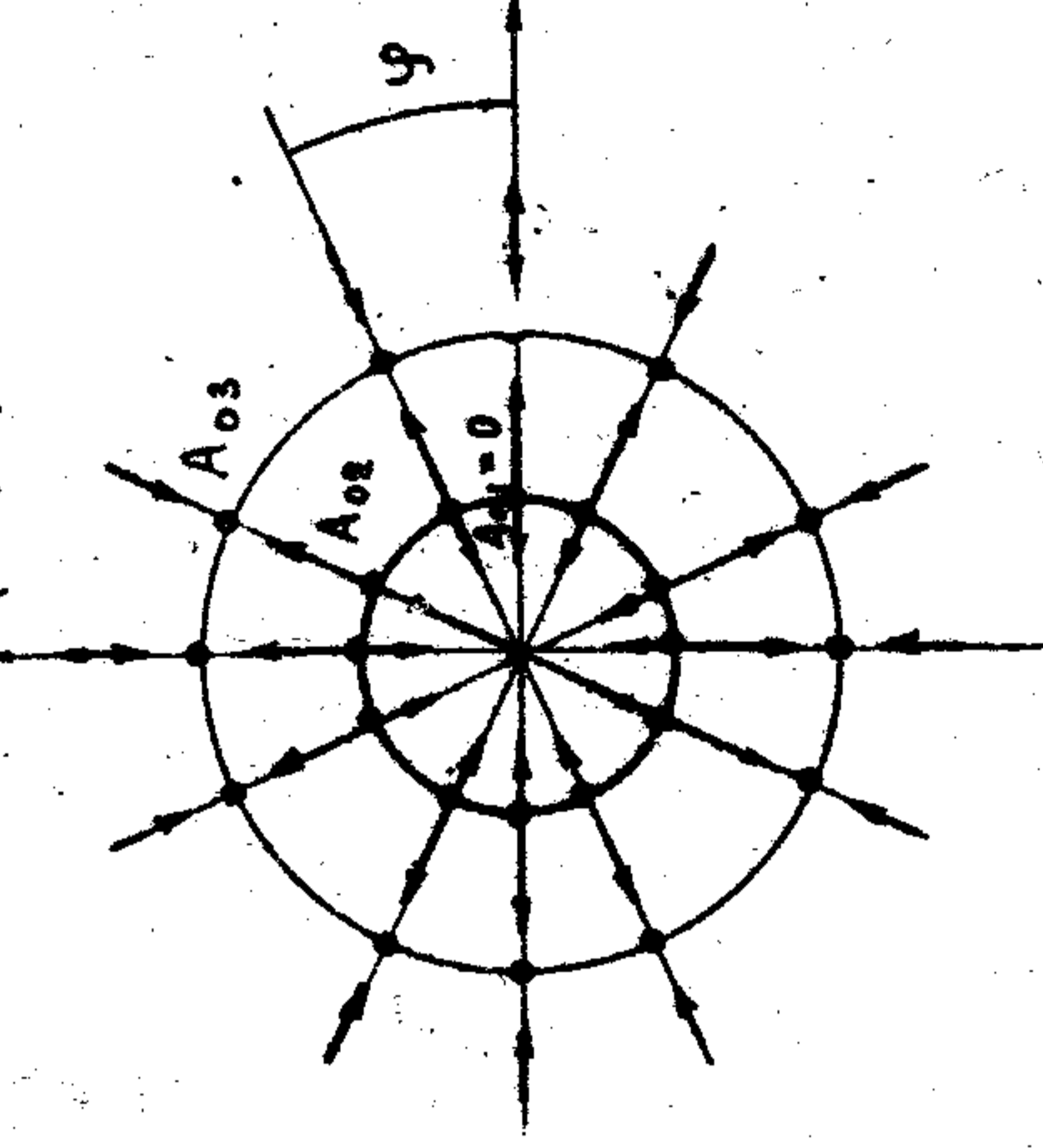


Рис. 1

Перейдем теперь от плоскости переменных Ван-дер-Поля к фазовой плоскости  $x, y$  с помощью формул преобразования (2). Фазовый портрет на плоскости  $x, y$  может быть получен, если вращать плоскость Ван-дер-Поля по часовой стрелке с круговой частотой вокруг начала координат. Тогда окружности, состоящие из состояний равновесия, перейдут в круговые предельные циклы, имеющие те же радиусы

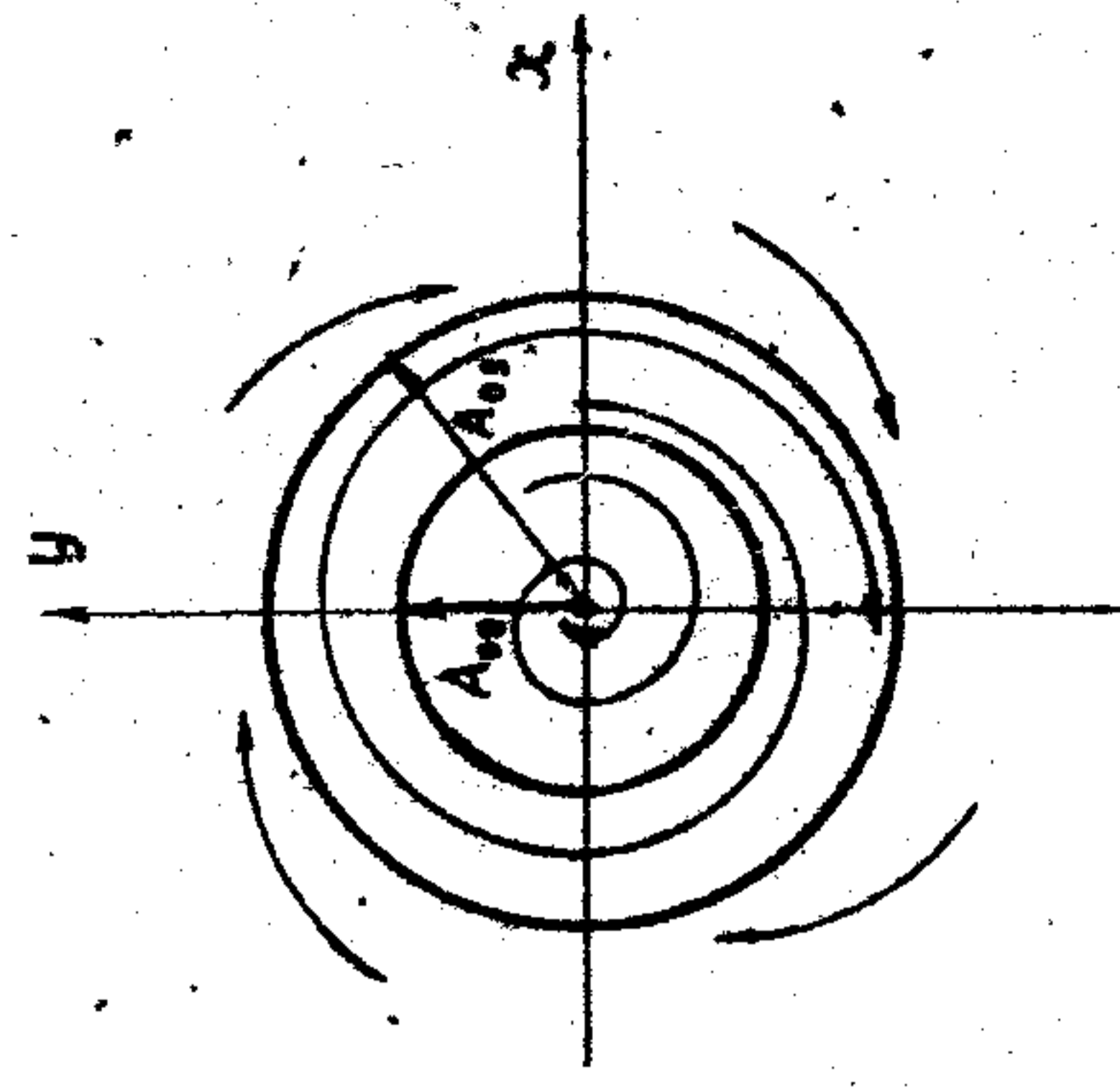


Рис. 2

$A_0$  (рис.2). Предельные циклы будут устойчивы, если устойчивы состояния равновесия укороченных уравнений, и наоборот, остальные траектории, представляющие собой отрезки прямых на плоскости переменных Ван-дер-Поля, преобразуются на плоскости  $X, Y$  в спирали (рис.2).

2. Пусть функция  $\Phi(A) = 0$ , что имеет место в консервативных системах. Система укороченных уравнений (7) принимает вид:

$$\frac{dA}{dt} = 0,$$

$$\frac{d\psi}{dt} = M\psi(A).$$

Интегрируя эти уравнения, будем иметь

$$A = A_0 = \text{const}, \quad \psi = (M\psi(A_0)t + \psi_0).$$

Подставляя эти выражения в решение (2), получаем

$$x = A_0 \cos[(1 + M\psi(A_0))t + \psi_0]. \quad (10)$$

Отсюда видно, что исходная система в этом случае совершает незатухающие неизохронные колебания с амплитудой  $A_0$ , определяемой начальными условиями (начальной энергией системы) и частотой  $\omega = 1 + (M\psi(A_0))$ , зависящей от амплитуды.

Фазовый портрет для этого случая на плоскости Ван-дер-Поля изображен на рис.3 (примем, что  $\psi(A) > 0$ ). На фазовой плоскости  $X, Y$  он будет аналогичным

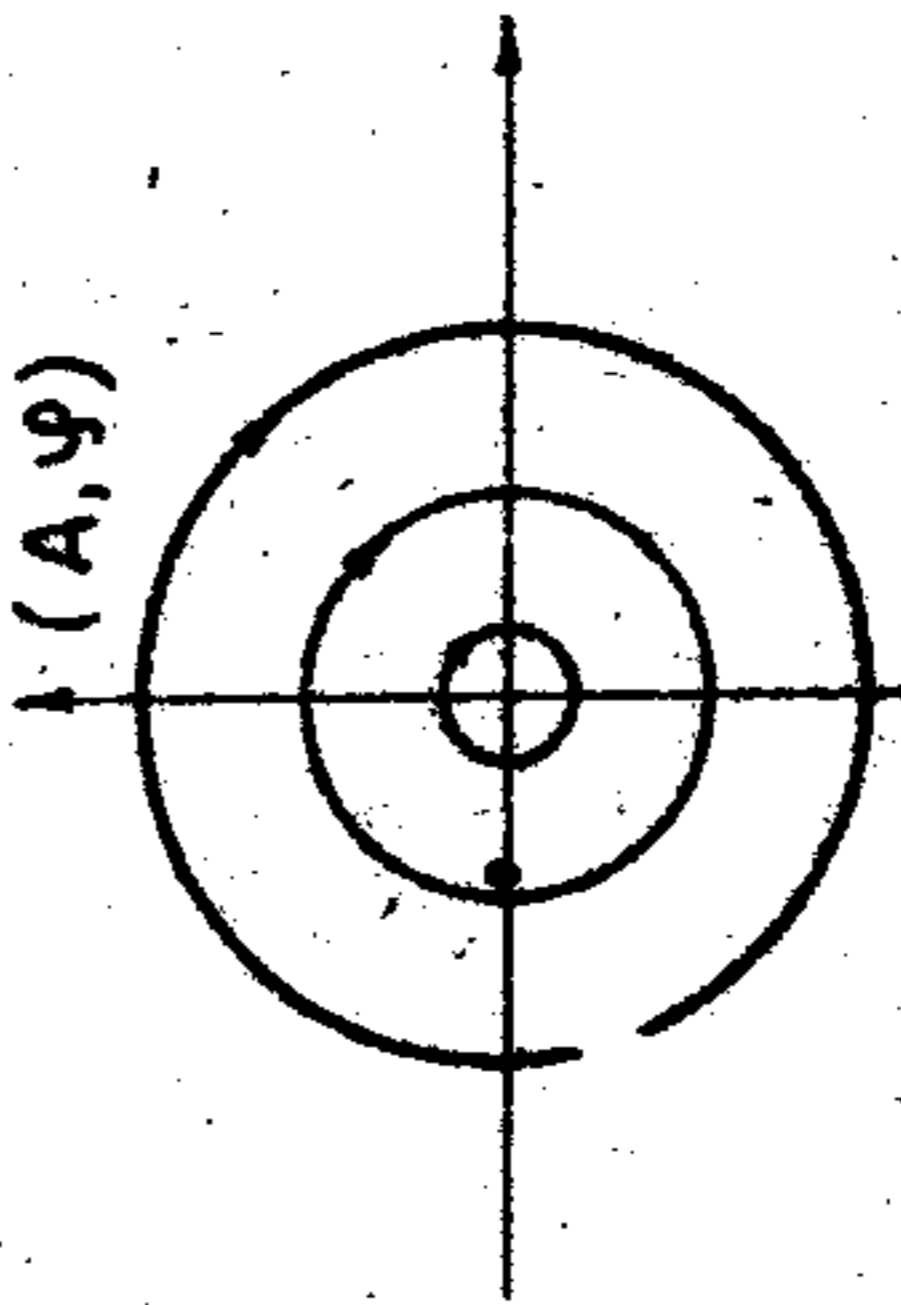


Рис.3

3. При исследовании динамики генераторов на транзисторах, туннельных диодах, лампах при учете сеточных токов, система укороченных уравнений будет иметь общий вид:

$$\frac{dA}{dt} = M\Phi(A),$$

$$\frac{d\psi}{dt} = M\psi(A). \quad (11)$$

Первое уравнение, не зависящее от  $\psi$ , и в этом случае ис- следуется отдельно, и его состояния равновесия определяют радиусы предельных циклов или амплитуды автоколебаний:

Пусть  $A = A_0$  - устойчивая амплитуда колебаний, тогда, как и в предыдущем случае, решение исходной системы, соответствующее устойчивому периодическому режиму, запишется в виде (10)

$$x = A_0 \cos[(1 + M\psi(A_0))t + \psi_0].$$

Отличие будет в том, что в данном случае величина амплитуды  $A_0$  определяется свойствами системы, а не начальными условиями. В отличие от первого случая здесь мы имеем определенную поправку на частоту  $\Delta\omega = M\psi(A_0)$ .

Построим фазовый портрет в плоскости переменных Ван-дер-Поля (рис.4). Как видно из системы (7), уравнение  $\Phi(A_0) = 0$  определяет радиусы предельных циклов, направление движения по которым определяется знаком функции  $\psi(A_0)$ . В точках, где функция  $\psi(A_0)$  обращается в нуль, направление движения меняется на обратное. Поэтому нанесем на плоскости переменных Ван-дер-Поля не только окружности радиуса  $A_0$  (предельные циклы), но и окружности с радиусами  $\bar{A}$ , определяемые уравнением  $\psi(\bar{A}) = 0$ . Примем, как и в первом случае, что уравнение  $\Phi(A_0) = 0$  имеет три корня и уравнение  $\psi(\bar{A}) = 0$  тоже имеет три корня и ни одно из ненулевых значений  $\bar{A}$  не совпадает со значениями  $A_0$ .

Если завращать фазовый портрет рисунка 4 со скоростью единица по часовой стрелке, то получим фазовый портрет на плоскости. Он будет совершенно аналогичен тому портрету, который получается в первом случае (рис.2), т.к. движения по фазовым траекториям рис.4 происходят со скоростью порядка  $M \ll 1$ .

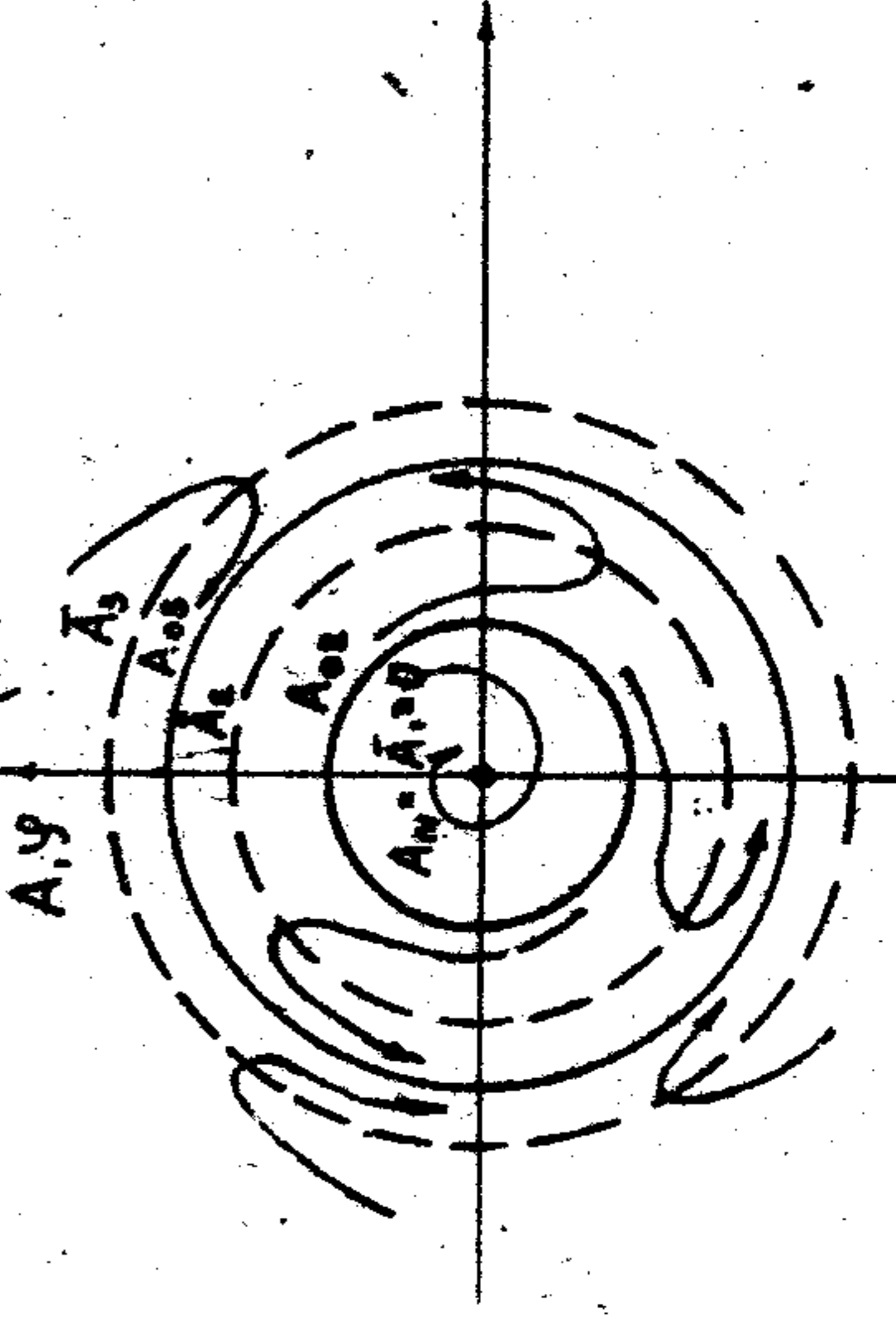


Рис.4

2.2. Укороченные уравнения в комплексных амплитудах. Изложенный выше метод Ван-дер-Поля позволяет решать задачи при различных аппроксимациях нелинейностей (полиномами, трансцендентными функциями, рядами, кусочно-линейными функциями). Однако, если нелинейность сложная, то усреднение представляет собой технически непростою задачу. В этом случае удобнее пользоваться методом усреднения, представляя решение в виде квазигармонических функций с медленно меняющимися комплексными амплитудами. Такое представление значительно упрощает процедуру усреднения.

Будем искать решение уравнения (I) в виде (3)

$$x = z e^{jt} + z^* e^{-jt}, \quad \dot{x} = j(z e^{jt} - z^* e^{-jt}), \quad (12)$$

где  $z$  - комплексная амплитуда; будем считать ее функцией времени. Для дальнейшего анализа удобно нелинейную функцию представить в виде двух слагаемых:

$$f(x, x) = -\frac{d}{dt} f_1(x) - f_2(x). \quad (13)$$

Функция  $f_1(x)$  характеризует потери в системе; если  $f_1(x) = 0$ , то система консервативна; если  $\frac{df_1}{dx} > 0$ , то потери в системе при данных значениях  $x$  положительны (и отрицательны при выполнении обратного неравенства). Как будет ясно из дальнейшего, именно функция  $f_1(x)$  определяет амплитуду автоколебаний.

Функция  $f_2(x)$  выполняет роль нелинейной составляющей восстанавливающей силы и она определяет поправку к частоте линейной системы. Таким образом, уравнение исходной системы запишем в виде:

$$\ddot{x} + x = -\left(M \frac{d}{dt} f_1(x) - M f_2(x)\right). \quad (14)$$

Решение его ищем в виде (12). Из принятой формы решения для следует, что выполняется соотношение:

$$j z e^{jt} + z^* e^{-jt} = 0. \quad (15)$$

Подставляя решение (12) в исходное уравнение (13), получим

$$j(j z e^{jt} - z^* e^{-jt}) = -\left(M \frac{d}{dt} f_1(x) - M f_2(x)\right). \quad (16)$$

Исключим из системы (15), (16),  $z^*$

$$2j z = -M e^{-jt} \frac{df_1(x)}{dt} - M e^{-jt} f_2(x).$$

Так же как и раньше, перейдем к укороченным уравнениям.

Проведем усреднение по времени:

$$2j \dot{z} = -\frac{M}{2\pi} \left[ \int_{-\pi}^{\pi} e^{-jt} \frac{df_1(x)}{dt} dt + \int_{-\pi}^{\pi} f_2(x) e^{-jt} dt \right].$$

Взяв первый интеграл по частям, и учитывая то, что  $\int_{-\pi}^{\pi} f_1(x) e^{-jt} dt = 0$  т.к.  $f_1 e^{-jt}$  - функция периодическая, получим

$$2j \dot{z} = -\frac{M}{2\pi} \left[ j \int_{-\pi}^{\pi} f_1 e^{-jt} dt + \int_{-\pi}^{\pi} f_2 e^{-jt} dt \right], \quad (17)$$

где  $f_1 = f_1(z e^{jt} + z^* e^{-jt})$ ,  $f_2 = f_2(z e^{jt} + z^* e^{-jt})$ .

Иначе уравнение (17) можно записать в виде

$$2j \dot{z} = -M \left[ j f_1 e^{-jt} + f_2 e^{-jt} \right], \quad (18)$$

$$\overline{f_1 e^{-jt}} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f_1 e^{-jt} dt,$$

$$\overline{f_2 e^{-jt}} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f_2 e^{-jt} dt.$$

Очевидно, что при усреднении вклад дадут лишь гармонические составляющие вида  $e^{jt}$ , т.е. процедура усреднения свелась к выделению комплексных амплитуд функций  $f_1$  и  $f_2$  на собственной частоте линейного консервативного осциллятора, равной в нашем случае единице.

Приведем вид укороченных уравнения (18) для случая, когда нелинейности заданы степенными рядами:

$$f_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n x^n}{n!}, \quad f_2(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n x^n}{n!}. \quad (19)$$

Подставим в ряды  $x = z e^{jt} + z^* e^{-jt}$  и разложим функции на комплексные гармонические составляющие.

Рассмотрим функцию  $f_1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n (z e^{jt} + z^* e^{-jt})^n}{n!}$ .

Воспользуемся формулой для бинома Ньютона, получим:

$$f_1 = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \frac{a_n z^m z^{*(m-n)}}{m! (n-m)!} e^{j(2m-n)t}$$

или после смены порядка суммирования

$$f_1 = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=m}^{\infty} \frac{a_n z^m z^{*(n-m)}}{m! (n-m)!} e^{j(2m-n)t}$$

В этой двойной сумме заменим  $n$  на  $n+m$  и получим разложение на гармонические составляющие в виде:

$$f_1 = \sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{a_{n+m} z^m z^{*n}}{m! n!} e^{j(m-n)t} \quad (20)$$

Аналогично

$$f_2 = \sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{b_{n+m} z^m z^{*n}}{m! n!} e^{j(m-n)t} \quad (21)$$

Подставляя эти выражения в уравнение (18) и учитывая, что при усреднении дадут вклад лишь члены при  $(m-n)=1$ , получим укороченные уравнения в виде:

$$2\dot{z} = -Mz [\tilde{f}_1 - j\tilde{f}_2] \quad (22)$$

$$\tilde{f}_1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_{2n+1} (zz^*)^n}{n! (n+1)!}, \quad \tilde{f}_2 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_{2n+1} (zz^*)^n}{n! (n+1)!}$$

Пологая  $z = \rho e^{j\varphi}$ ,  $z^* = \rho e^{-j\varphi}$  и приравнявая к нулю действительную и мнимую части полученного уравнения, придем к укороченным уравнениям для амплитуды и фазы:

$$2\dot{\rho} = -M\rho\tilde{f}_1, \quad 2\dot{\varphi} = M\tilde{f}_2 \quad (23)$$

Величины  $\tilde{f}_1$  и  $\tilde{f}_2$  зависят от квадратов амплитуд  $(zz^* = \rho^2)$  и носят название средней средней крутизны нелинейностей. Таким образом, мы пришли к уравнениям (23), аналогичным укороченным уравнениям (7): первое уравнение определяет значения амплитуд колебаний и их устойчивость, второе - дает зависимость поправки к частоте от квадрата амплитуды.

Из первого уравнения системы (23) следует, что исходная система имеет состояние равновесия ( $\rho=0$ ) устойчивое, если  $\tilde{f}_1(a) > 0$  и неустойчивое в противном случае. Кроме нулевого состояния равновесия, система (23) может иметь предельные циклы, если при некото-

х) В дальнейшем величину  $\rho$  будем называть амплитудой, хотя фактически она равна половине амплитуды, как это видно из соотношения (4).

рых значениях  $\rho = \rho_0$ ,  $\tilde{f}_1$  обращается в нуль. Предельный цикл будет устойчивым, если  $\tilde{f}'(\rho_0) > 0$ . Из выражений (22) нетрудно увидеть, что если нелинейность аппроксимирована полиномом, имеющим степень  $(2n+1)$ , то полином, определяющий среднюю крутизну как функции  $\rho^2$ , имеет степень, равную  $n$ . Это значит, что число предельных циклов в этом случае не может превышать  $n$ . Так, например, при аппроксимации нелинейности кубическим полиномом

$$\tilde{f}_1 = a_1 + \frac{a_3}{2} \rho^2 \quad (24)$$

может существовать не более одного предельного цикла. На рис. 5 представлена зависимость  $\tilde{f}_1$  от  $\rho^2$  для разных знаков коэффициентов  $a_1$  и  $a_3$ , а на рис. 6 - соответствующие фазовые портреты.

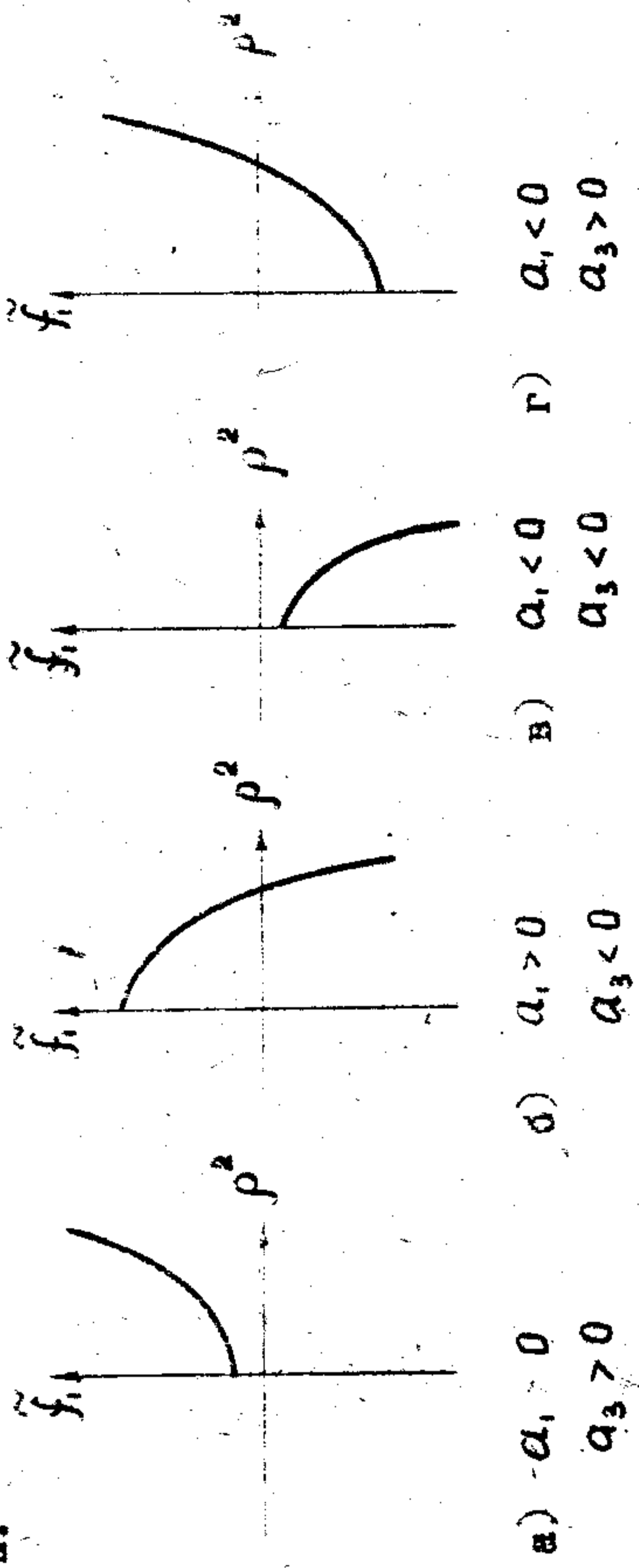


Рис. 5

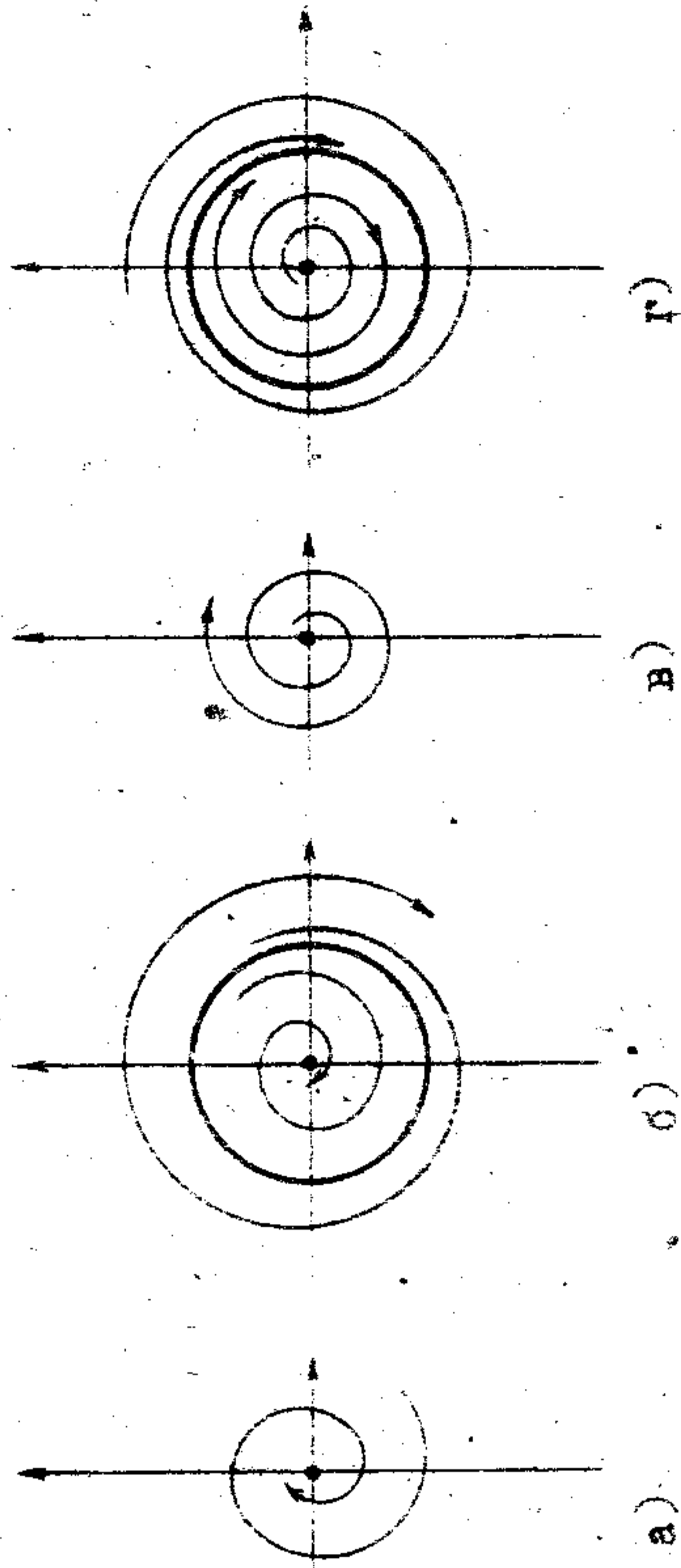


Рис. 6

Как видно из рисунка 6, исходная система будет автоколебательной (будет иметь устойчивый предельный цикл) лишь в случае  $Q_1 < 0, Q_2 > 0$ . Очевидно, что в такой системе (при таких знаках коэффициентов нелинейной функции) малые отклонения от состояния равновесия будут нарастать (за счет линейного члена  $Q_1$ ), но рост их не будет беспредельным - он ограничится нелинейным членом ( $Q_2 > 0$ ).

Если аппроксимировать нелинейность полиномом более высокой степени, то вид зависимостей  $f_1(\rho^2)$  будет определяться не только знаками коэффициентов  $Q_m$ , но и соотношением между ними. На рис. 7 и 8 представлена зависимость средней крутизны нелинейности от квадрата амплитуды и соответствующие фазовые портреты при аппроксимации нелинейности полиномами 5-ой и 7-ой степени для различных коэффициентов  $f_1$ , соответствующих автоколебательным режимам.

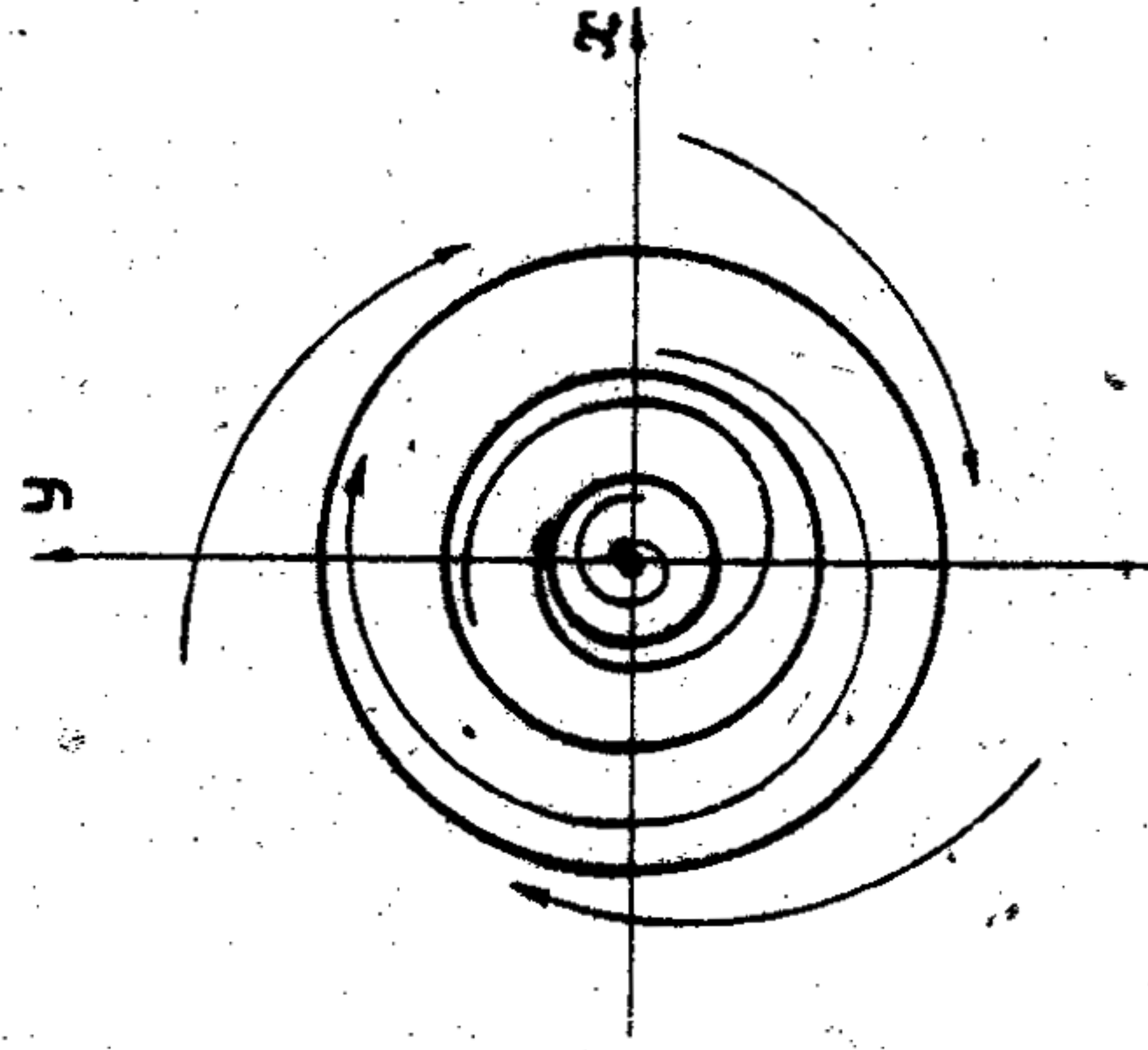
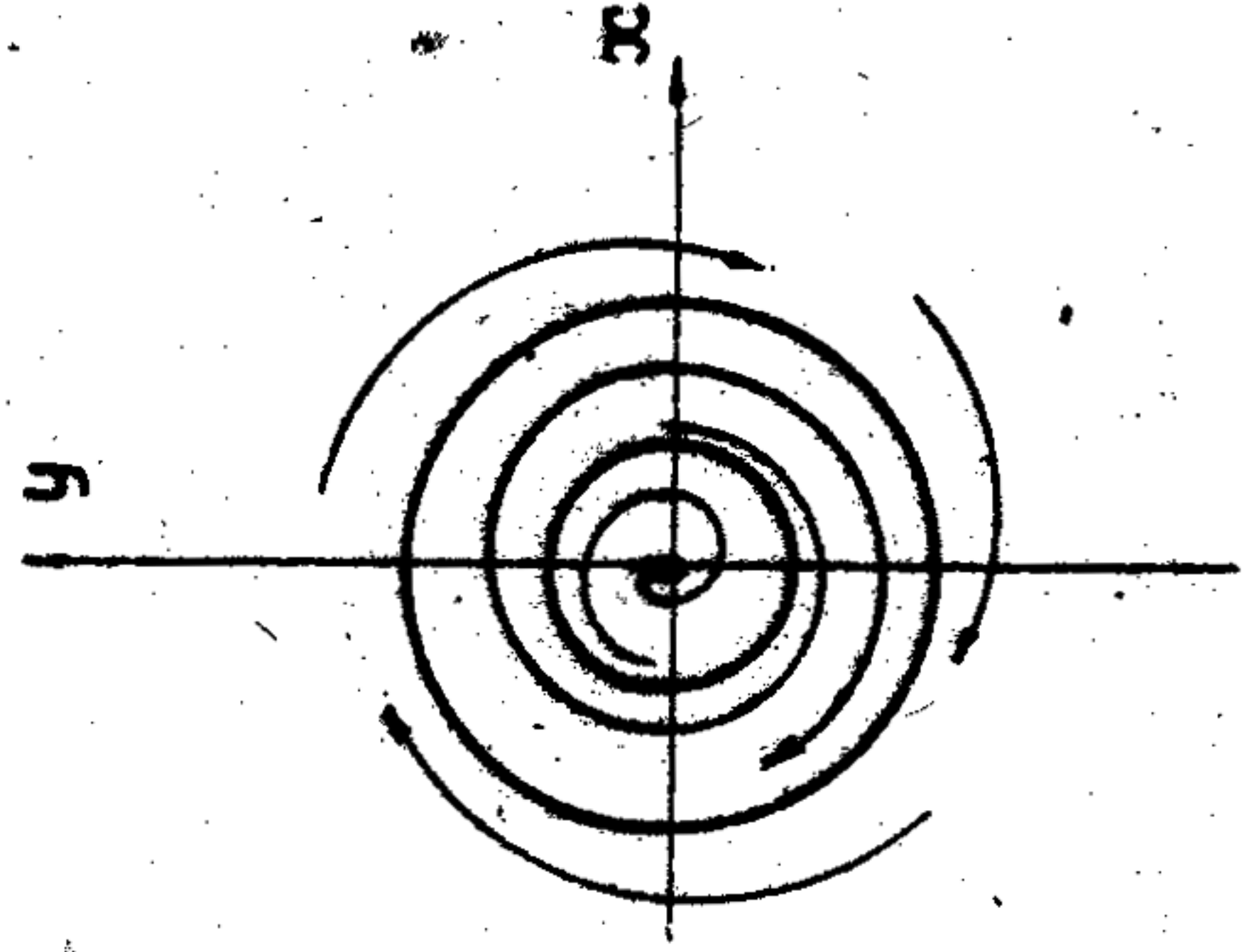
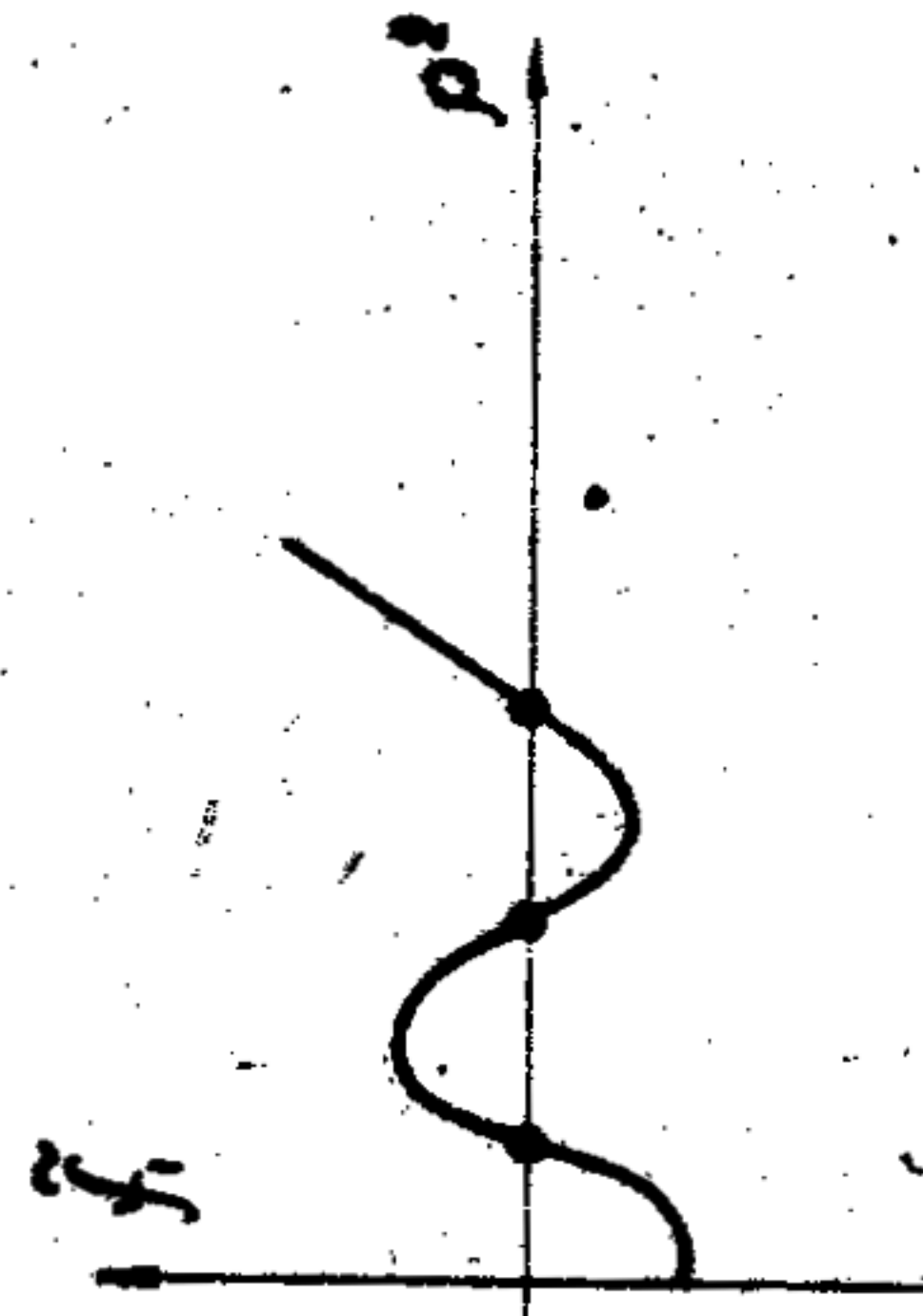
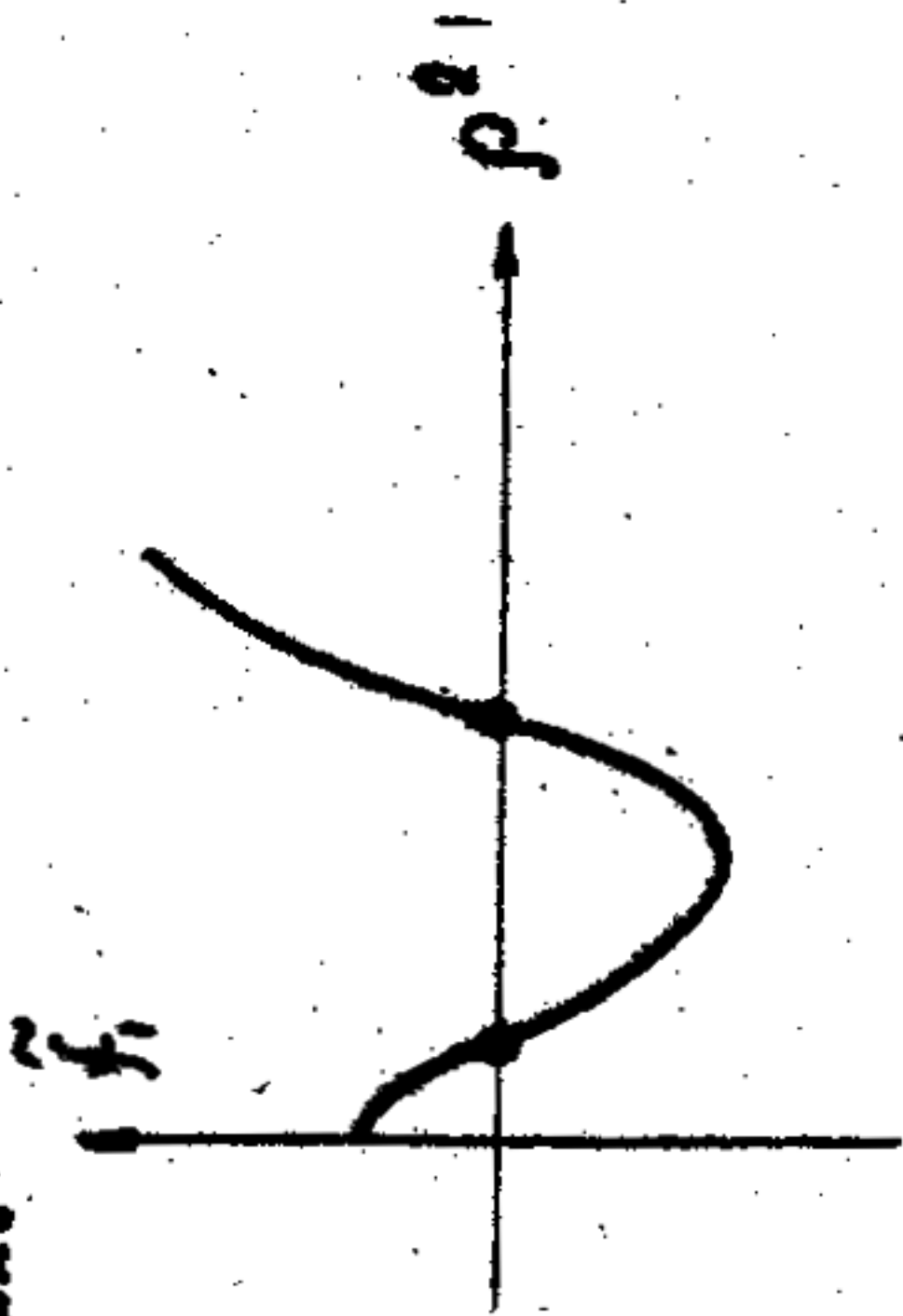


Рис. 7

Рис. 8

Рис. 7 соответствует системе, в которой автоколебания возбуждаются лишь в том случае, когда начальные условия заданы вне устойчивого предельного цикла. Этот режим возбуждения генератора называется "жестким" в отличие от "мягкого" режима, который устанавливается при лбрых начальных условиях (рис. 6г). Рис. 8 соответствует так называемому "сложно-жесткому" режиму возбуждения генератора. В этом случае система имеет два устойчивых предельных цикла и установление того или другого зависит от начальных условий.

Заметим, что укороченные уравнения, как это видно из соотношения (22), зависят лишь от нечетной части нелинейности. Поэтому, если нелинейность задана графически, целесообразно графически же выделить нечетную ее часть с помощью приема, определяемого формулой:

$$f_{\text{неч}}(x) = \frac{1}{2} [f(x) - f(-x)]$$

которая

получается из соотношения  $f(x) = f_{\text{зет}}(x) + f_{\text{неч}}(x)$ ,

$$f(-x) = f_{\text{зет}}(x) - f_{\text{неч}}(x).$$

а затем аппроксимировать нелинейность подходящей аналитической функцией.

Посмотрим, например, как зависит степень аппроксимирующего полинома от координат состояния равновесия в системе, содержащей туннельный диод. Будем считать, что характеристика туннельного диода  $f(x)$  задана графически (рис. 9) и что состояние равновесия находится в начале координат.

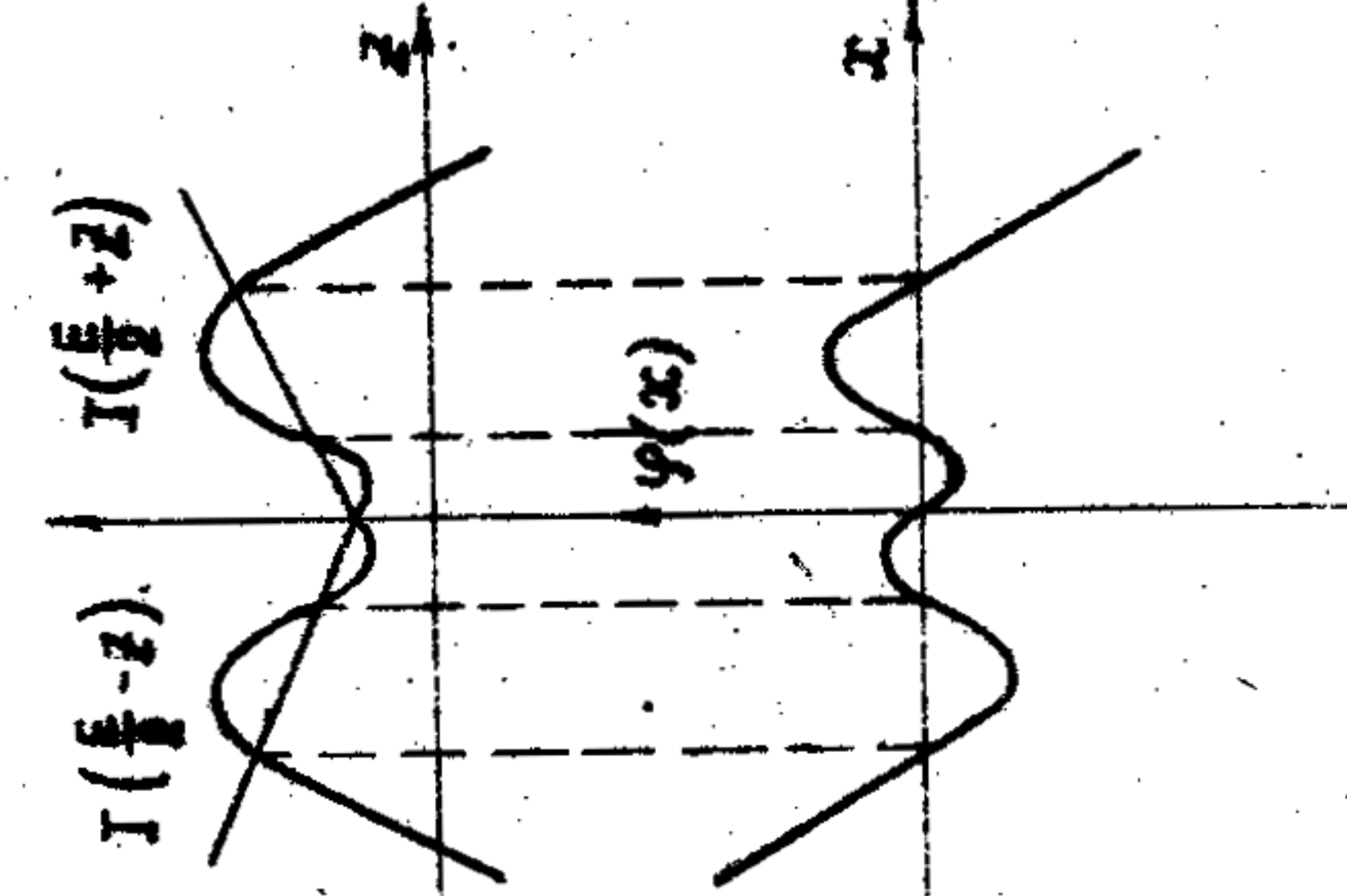
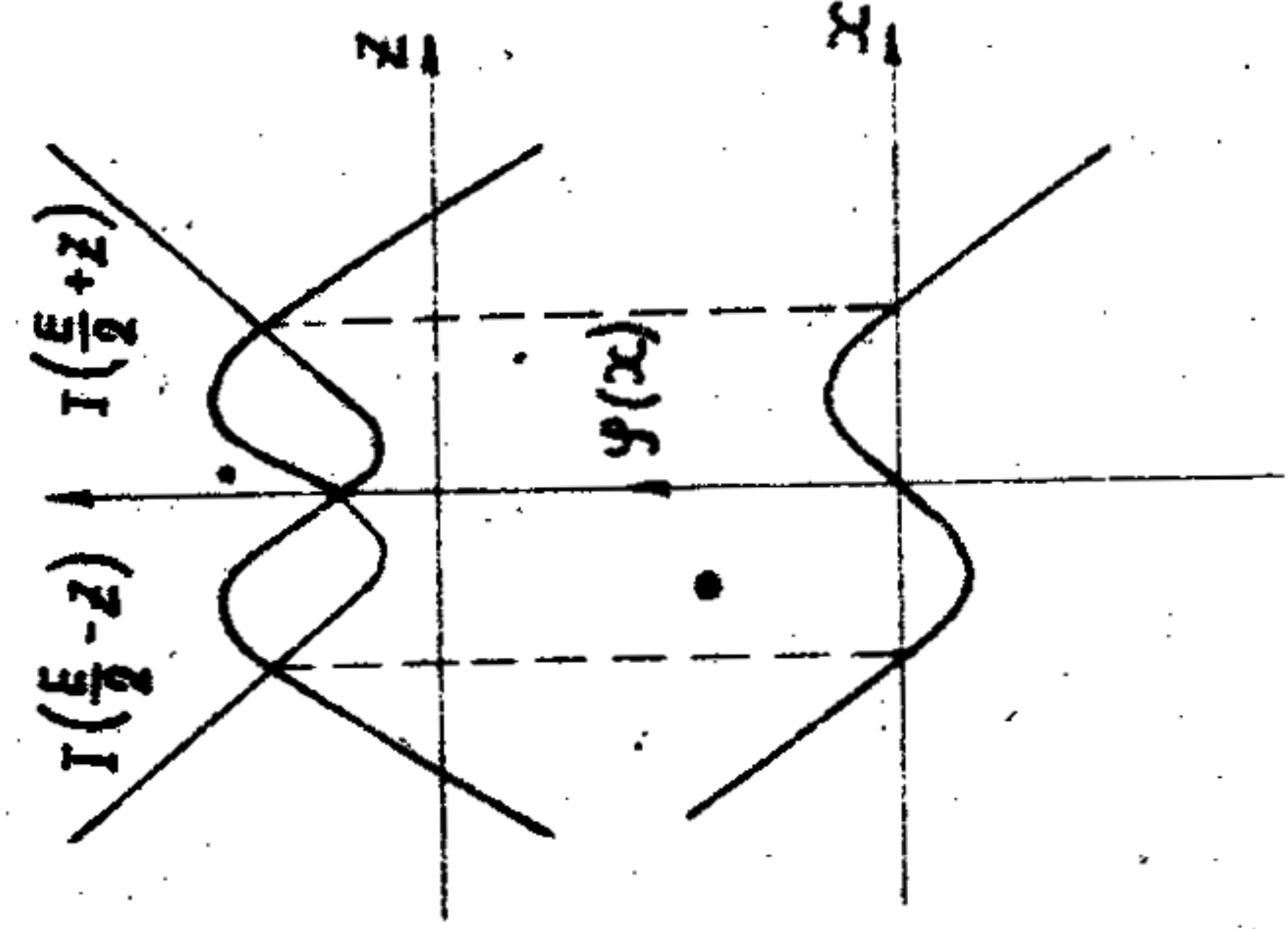


Рис. 9а

Рис. 9б

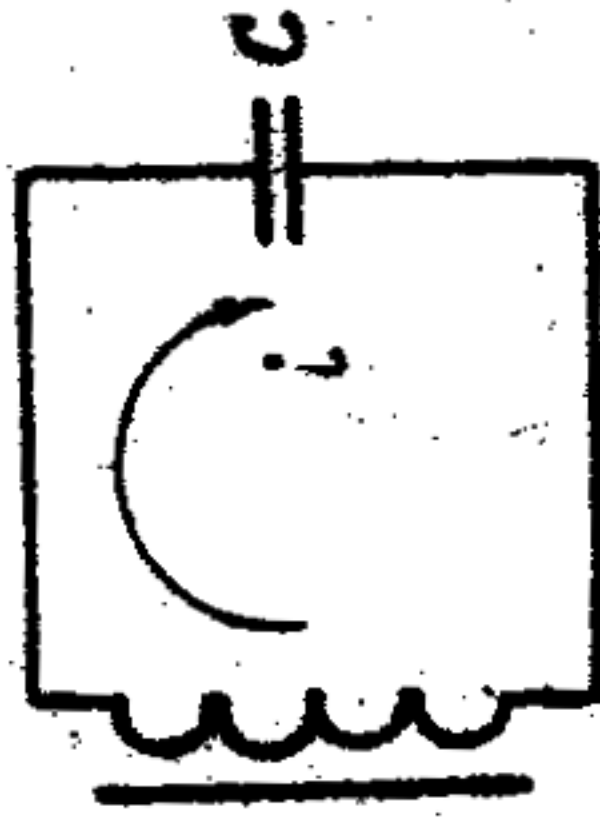
После выделения нечетной части характеристики видно, что если постоянные равновесия находятся в точке перегиба характеристики туннельного диода, то нечетную часть  $f_{нез}$  можно аппроксимировать кубическим полиномом (рис.9а); если состояние равновесия находится вблизи участка с горизонтальной касательной (рис.9б), то для аппроксимации  $f_{нез}$  нужен уже полином пятой степени. Таким образом, вид аппроксимации, а следовательно и возможный режим работы генератора, зависит от положения состояния равновесия или, как говорят, от выбора рабочей точки на нелинейной характеристике.

2.3. Примеры на применение метода

Пример 1.

Рассмотрим колебания, вынуждаемые в контуре с нелинейной индуктивностью (рис.10). Будем считать, что потягосцепление и ток в катушке связаны соотношением

$$Li = \Phi + L\Phi^3 \quad (25)$$



Потери энергии пренебрегаем.

Уравнение, описывающее такой контур, имеет вид

$$L \frac{d\Phi}{dt} + \frac{1}{C} \int i dt = 0.$$

Рис.10

Введем новое безразмерное время  $\tau = \frac{1}{\sqrt{LC}} t$  и учитывая соотношение (25), получим

$$\frac{d^2\Phi}{d\tau^2} + \Phi = -\alpha \Phi^3$$

При условии, что  $\alpha \ll 1$ , т.е. нелинейность мала, мы получаем уравнение типа (I) и можем использовать метод Ван-дер-Поля. Введем  $Q = \Phi$  и запишем исходное уравнение в виде системы двух уравнений первого порядка

$$\dot{\Phi} = Q, \quad \dot{Q} = -\Phi - \alpha \Phi^3 \quad (26)$$

Будем искать решение этой системы в виде

$$\Phi = A \cos(t + \varphi) = A \cos \theta,$$

$$Q = -A \sin \theta$$

и, подставляя его в систему (26), получим

$$A \cos \theta - \varphi A \sin \theta = 0, \\ -A \sin \theta - A \dot{\varphi} \cos \theta = -\alpha (A \cos \theta)^3.$$

Разрешая эту систему относительно  $A$  и  $\varphi$ , приходим к уравнениям

$$A = \alpha (A \cos \theta)^3 \sin \theta, \\ A \dot{\varphi} = \alpha (A \cos \theta)^3 \cos \theta. \quad (27)$$

Согласно (6), укороченные уравнения системы (27) можно записать в следующем виде:

$$\dot{A} = \frac{\alpha A^3}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos^3 \theta \sin \theta d\theta = 0 \\ A \dot{\varphi} = \frac{\alpha A^3}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos^4 \theta d\theta = \frac{3\alpha}{8} A^3 \quad (28)$$

или  $A = A_0$ ,  $\dot{\varphi} = \frac{3\alpha}{8} A_0^2$ , следовательно, амплитуда колебаний остается постоянной и определяется начальными условиями. Фаза и частота колебаний зависят от амплитуды и эта зависимость определяется соотношением  $\omega = 1 + \frac{3\alpha}{8} A_0^2$ , где  $\omega = 1$  есть безразмерная частота линейного контура. Фазовые траектории в этом случае (рис.11) представляют собой континuum окружностей, радиус которых зависит от начальных условий, а время движения по каждой от ее радиуса ( $T = \frac{1}{\omega} \sim \frac{1}{A_0^2}$ ).

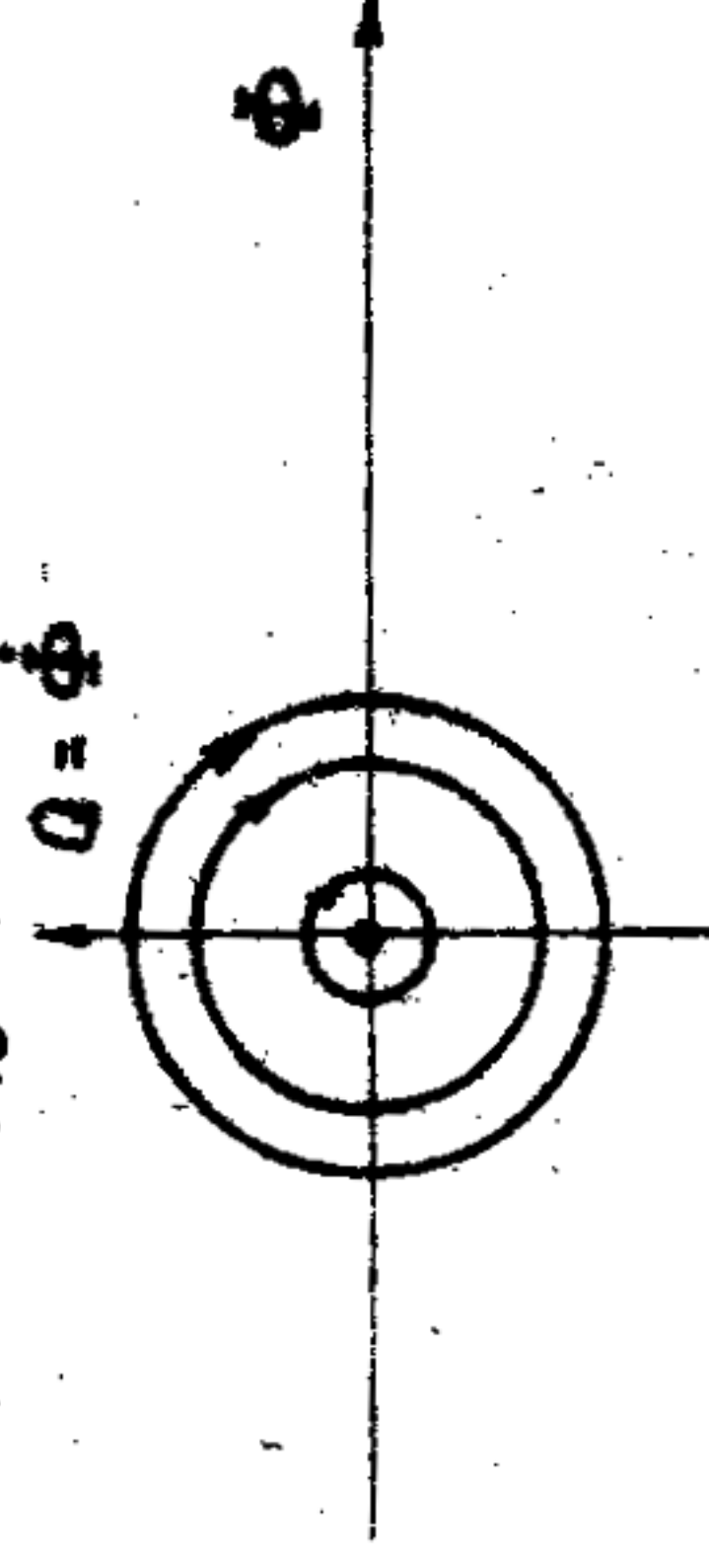


Рис.11

Напомним, что метод Ван-дер-Поля является приближенным методом и оценка погрешности решения в данном примере. Точное интегрирование системы (26) дает

$$\frac{dQ}{d\Phi} = -\frac{\Phi + \alpha \Phi^3}{Q}, \\ Q^2 + \Phi^2 = -\frac{\alpha}{2} \Phi^4 + h,$$

т.е. интегральные кривые представляют собой семейство эллипсов, которые тем ближе к окружностям, чем меньше  $\alpha$  (т.е. нелинейности системы).

Таким образом, действительно наше асимптотическое решение,

полученное методом Ван-дер-Поля, является тем более точным, чем меньше параметр  $\alpha = M$ . Решим эту же задачу, представляя решение в комплексной форме (3):

$$\begin{aligned} \Phi &= z e^{j\tau} + z^* e^{-j\tau}, \\ Q &= j z e^{j\tau} - j z^* e^{-j\tau}. \end{aligned}$$

Тогда, подставляя это решение в систему (26), получим

$$\dot{z} e^{j\tau} + z^* e^{-j\tau} = 0$$

$$j \dot{z} e^{j\tau} - j \dot{z}^* e^{-j\tau} = -\alpha (z^3 e^{3j\tau} + 3z^2 z^* e^{2j\tau} + 3z z^{*2} e^{j\tau} + z^{*3} e^{-3j\tau})$$

Исключая из этой системы  $\dot{z}^*$ , получим

$$2j \dot{z} = -\alpha (z^3 e^{3j\tau} + 3z^2 z^* e^{j\tau} + 3z z^{*2} e^{-j\tau} + z^{*3} e^{3j\tau}) e^{-j\tau}$$

После усреднения укороченное уравнение (18) принимает вид:

$$2j \dot{z} = -3\alpha z^2 z^*$$

Переходя к действительным амплитуде и фазе согласно соотношениям

$$\begin{aligned} z &= \rho e^{j\psi}, \quad z^* = \rho e^{-j\psi}, \quad \text{будем иметь:} \\ \rho \dot{e}^{j\psi} + j\psi \rho e^{j\psi} &= j \frac{3\alpha \rho^3 e^{j\psi}}{2} \end{aligned}$$

Разделяя действительную и мнимую части, получим

$$\dot{\rho} = 0, \quad \psi = \frac{3\alpha \rho^2}{2}$$

Уравнения получаются аналогичными (28), если учесть, что согласно соотношению (4)  $\rho = \frac{A}{2}$ .

Пример 2.

Найдем зависимость частоты колебаний от амплитуд для кусочно-линейной системы, описываемой уравнением:

$$\ddot{x} + x = M f(x), \quad \text{где } f(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 1 \\ x & x > 1 \end{cases}$$

В этом случае удобнее решение искать в форме (2)

$$x = A \cos(t + \varphi) = A \cos \theta,$$

$$y = -A \sin(t + \varphi) = -A \sin \theta.$$

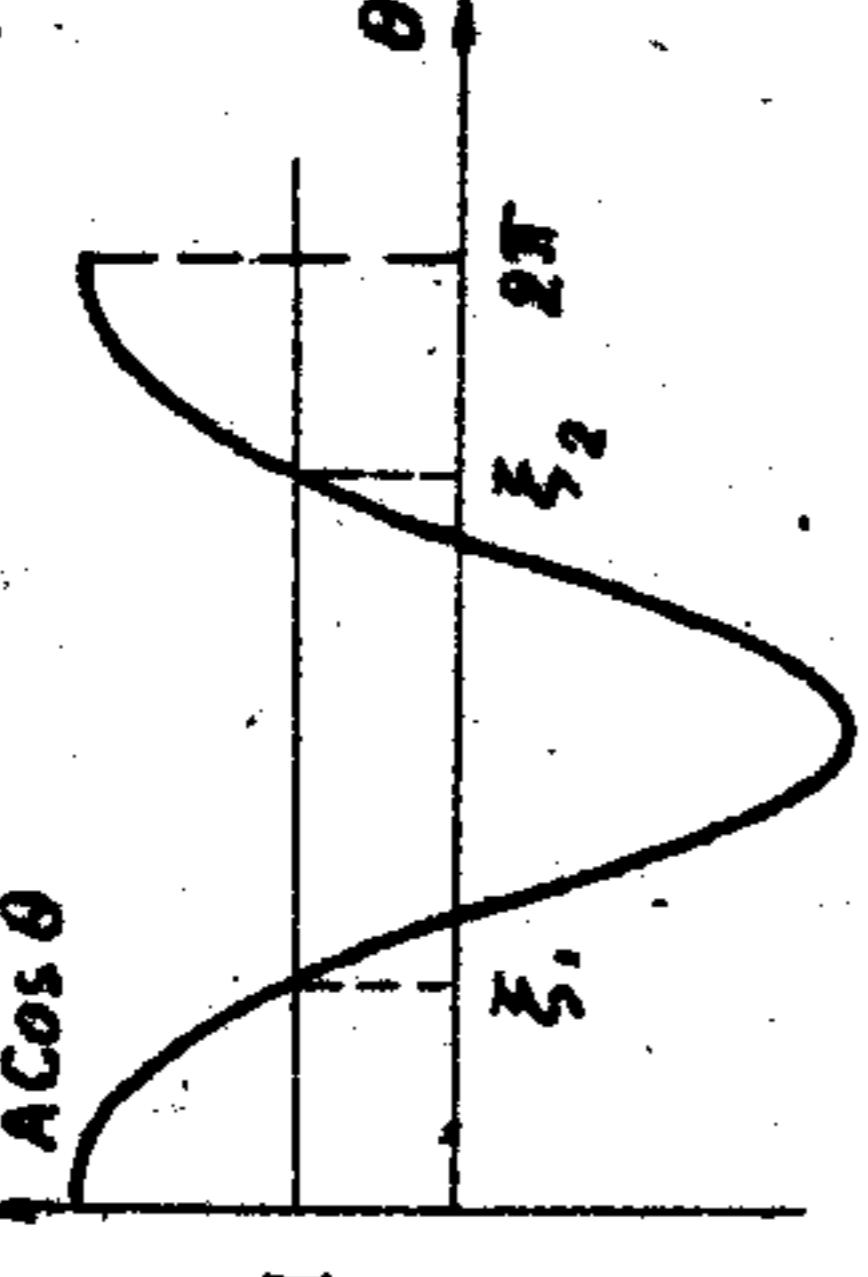
Учитывая, что  $x = A \cos \theta$ , запишем нелинейную функцию в виде

$$f(A \cos \theta) = \begin{cases} 0 & \text{при } A \cos \theta \leq 1 \\ A \cos \theta & \text{при } A \cos \theta > 1 \end{cases}$$

Подставляя принятое решение в исходное уравнение и усредняя, приходим к укороченным уравнениям вида (6):

$$\frac{dA}{dt} = -\frac{M}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(A \cos \theta) \sin \theta d\theta, \quad \frac{d\varphi}{dt} = -\frac{M}{2\pi A} \int_0^{2\pi} f(A \cos \theta) \cos \theta d\theta.$$

Для данной кусочно-линейной задачи при  $A > 1$  интервал интегрирования  $(0 + 2\pi)$  необходимо разбить на ряд интервалов в соответствии с видом нелинейной функции (рис.12). В результате интегрирования первого уравнения получим



$\frac{dA}{dt} = 0$ , т.к. подынтегральная функция или равна нулю, или представляет собой нечетную функцию, среднее значение за период от которой равно нулю. Значит, амплитуда колебаний будет постоянной ( $A = A_0$ ),

Рис.12

что естественно, т.к. рассматриваемая система - консервативна.

Интересующая нас зависимость частоты колебаний от амплитуды определяется вторым укороченным уравнением:

$$A \omega = \dot{\varphi} = -\frac{M}{2\pi A} \int_0^{2\pi} f(A \cos \theta) \cos \theta d\theta,$$

если  $A \cos \theta < 1$  (при этом  $A \leq 1$ ), которое, в соответствии с рисунком 12 записываем в виде:

$$\begin{aligned} \dot{\varphi} &= -\frac{M}{2\pi A} \left\{ \int_0^{\xi_1} A \cos^2 \theta d\theta + \int_{\xi_2}^{2\pi} A \cos^2 \theta d\theta \right\} = \\ &= -\frac{M}{2\pi A} 2A \int_0^{\xi_1} \cos^2 \theta d\theta = -\frac{M}{2\pi} \left( \frac{\theta}{2} \Big|_0^{\xi_1} + \frac{1}{4} \sin 2\theta \Big|_0^{\xi_1} \right) = \\ &= -\frac{M}{2\pi} \left( \xi_1 + \frac{1}{2} \sin 2\xi_1 \right). \end{aligned}$$

Величину  $\xi_1$  найдем из соотношения

$$A \cos \xi_1 = 1 \rightarrow \xi_1 = \arccos \frac{1}{A}$$

и соответственно  $\sin \xi_1 = \sqrt{1 - \cos^2 \xi_1} = \sqrt{1 - \frac{1}{A^2}}$ . Следовательно,

$$\begin{aligned} \dot{\varphi} &= -\frac{M}{2\pi} \left( \arccos \frac{1}{A} + \cos \left( \arccos \frac{1}{A} \right) \sin \left( \arccos \frac{1}{A} \right) \right) = \\ &= -\frac{M}{2\pi} \left( \arccos \frac{1}{A} + \frac{1}{A} \sqrt{1 - \frac{1}{A^2}} \right), \quad \text{при } A > 1 \end{aligned}$$

$\psi = 0$  при  $A \ll 1$

Графическая зависимость поправки к частоте от амплитуды колебания представлена на рис.13.

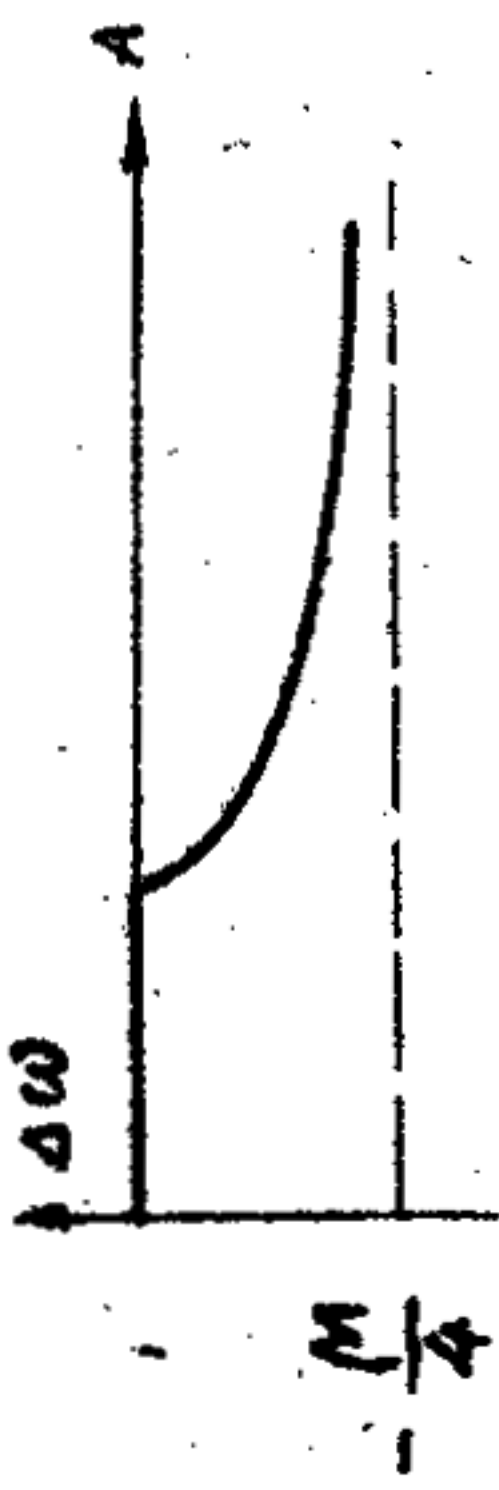


Рис.13

Пример 3

Иследуем поведение системы, схема которой представлена на

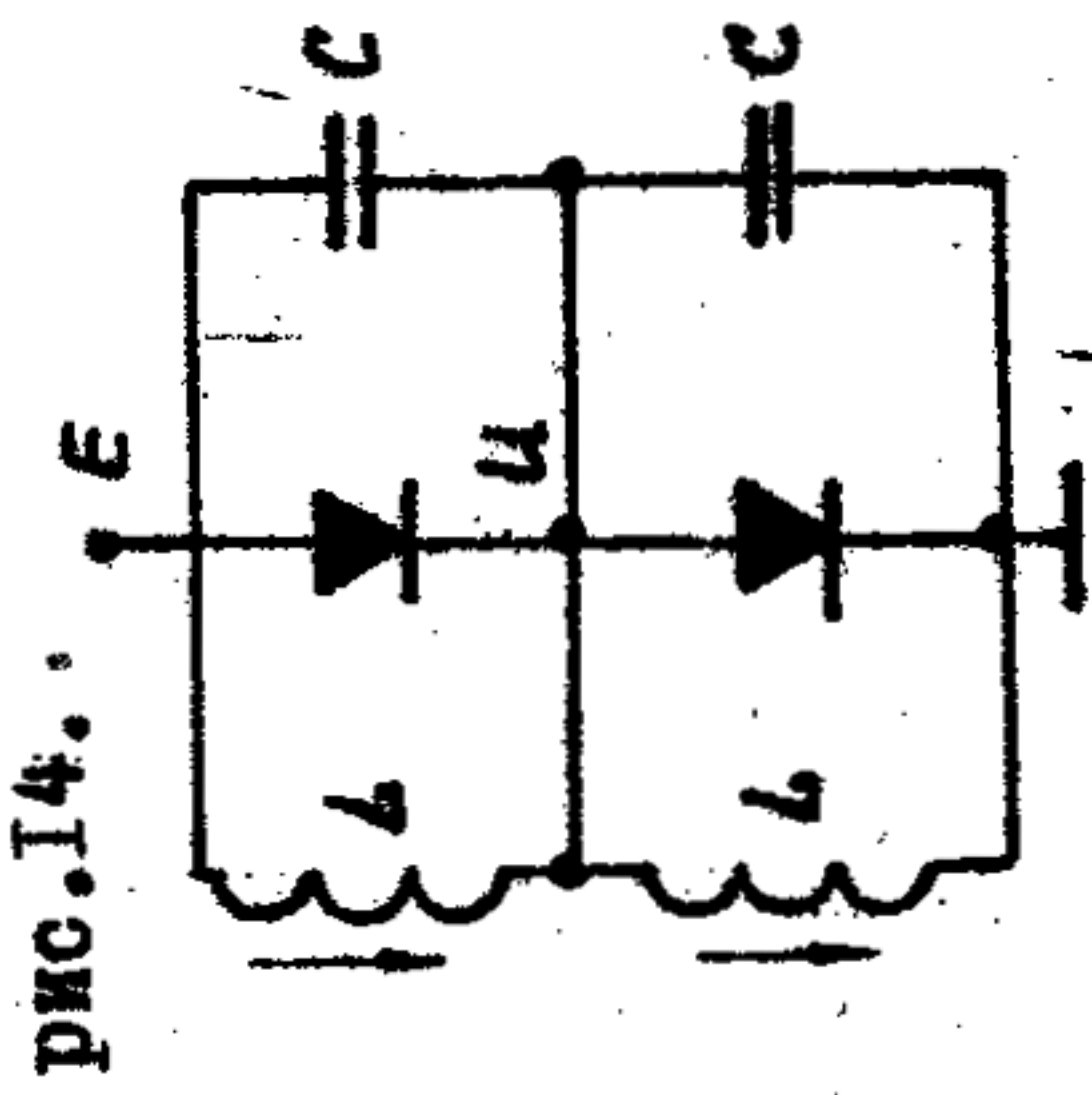


рис.14.

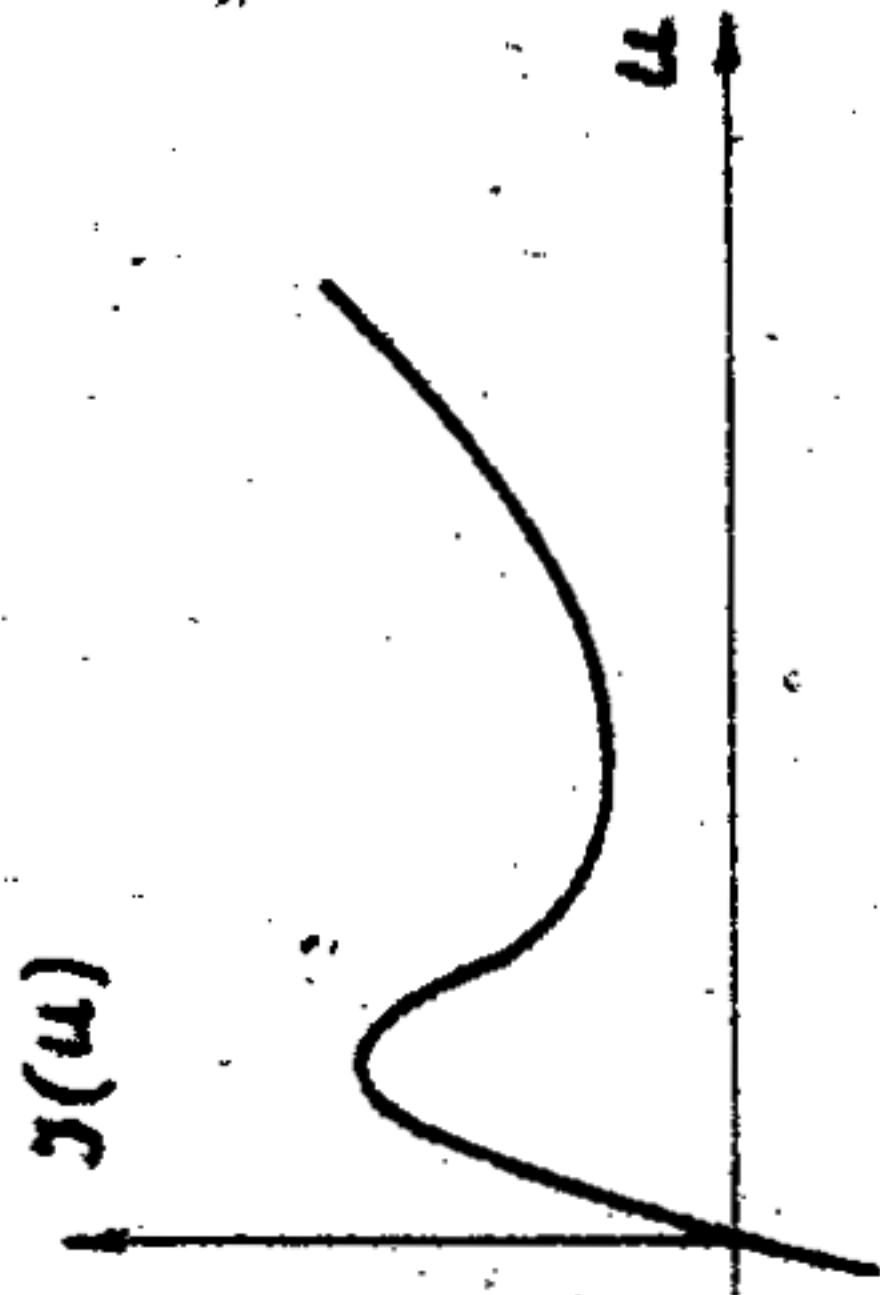


Рис.14

Уравнение, описывающее систему, может быть записано в виде:

$$\frac{1}{\alpha} \int (E-u) dt + J(E-u) + C \frac{d(E-u)}{dt} = \frac{1}{\alpha} \int u dt + J(u) + C \frac{du}{dt}$$

где  $J(E-u)$  и  $J(u)$  - токи через туннельные диоды, характеристики которых одинаковы и изображены на рис.15.

Продифференцировав уравнение по времени и сделав переход к безразмерному времени  $\tau = \frac{1}{\sqrt{LC}} t$ , получим

$$\frac{d^2 u}{d\tau^2} + (u - \frac{E}{2}) = -\frac{\delta}{2} \frac{d}{d\tau} [J(u - \frac{E}{2} + \frac{E}{2}) - J(E - (u - \frac{E}{2}) - \frac{E}{2})]$$

где  $\delta = \sqrt{\frac{L}{C}}$

Введем  $x = u - \frac{E}{2}$  и уравнение переищемся в виде

$$\ddot{x} + x = -\frac{\delta}{2} \frac{d}{d\tau} [J(x + \frac{E}{2}) - J(\frac{E}{2} - x)] \quad (29)$$

или  $\ddot{x} + x = -\frac{\delta}{2} \frac{d}{d\tau} \varphi(x, E)$ , где  $\varphi(x, E) = J(x + \frac{E}{2}) - J(\frac{E}{2} - x)$

Вид результирующей функции  $\varphi(x, E)$  зависит от величины на-пряжения смещения  $E$  (рис.16). Выберем величину  $E$  такой, чтобы зависимость  $\varphi(x, E)$  имела вид, представленный на рис.17. В этом случае нелинейность может быть аппроксимирована полиномом третьей степени.  $\varphi(x) = -\delta x(1 - \alpha x^2)$

Следовательно, уравнение (29) запишется в виде, удобном для применения метода Ван-дер-Поля:

$$\ddot{x} + x = M \frac{d}{dt} [x(1 - \alpha x^2)]$$

где  $M = \frac{\delta \varphi}{2}$  - линейный инкремент, характеризующий нарастание колебаний. Мagnitude параметра  $M$  означает близость системы к линейной, консервативной системе.

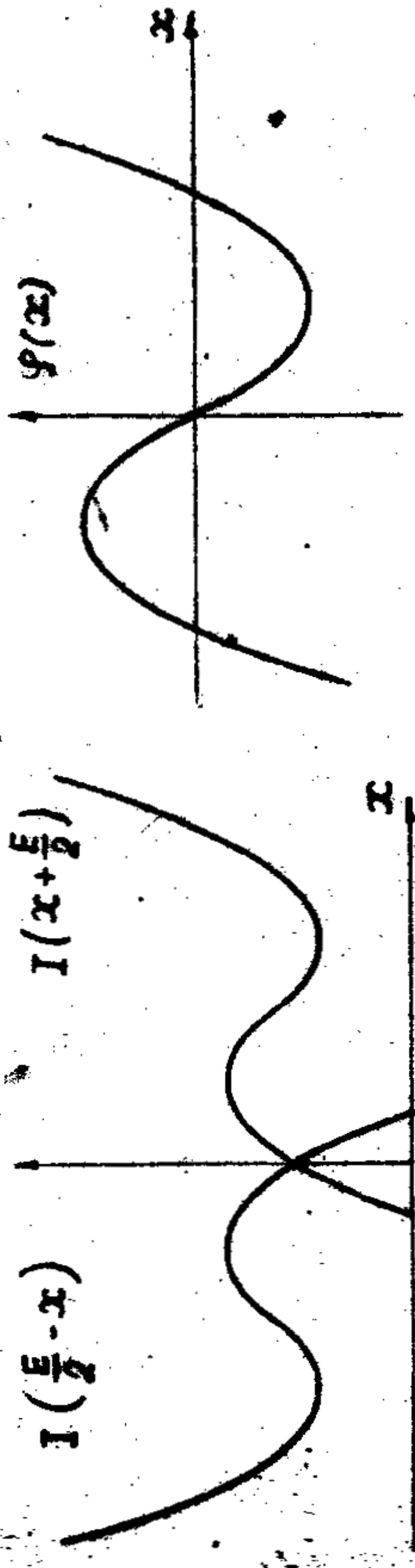


Рис.16

Рис.17

Представим последнее уравнение в виде двух уравнений первого порядка

$$\dot{x} = y$$

$$\dot{y} = -x + M \frac{dy}{dt}$$

где  $f_1 = x(1 - \alpha x^2)$

Решение этой системы удобно искать в комплексном представлении:

$$x = z e^{jt} + z^* e^{-jt}, \quad y = jz e^{jt} - jz^* e^{-jt}$$

Подставив решение в уравнение (30) и проводя усреднение, получим уравнение для  $z$  и аналогичное для  $z^*$ :

$$2j\dot{z} = \frac{M}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-jt} \frac{dy}{dt} dt$$

Взяв этот интеграл по частям (см.17)), будем иметь

$$2j\dot{z} = \frac{M}{2\pi} j \int_{-\pi}^{\pi} y e^{-jt} dt = j \frac{M}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-jt} (ze^{jt} + z^* e^{-jt}) [1 - \alpha(z e^{jt} + z^* e^{-jt})^2] dt = jM(z - \alpha(3z^2 z^*))$$

Пологая  $z = \rho e^{j\varphi}$ ,  $z^* = \rho e^{-j\varphi}$  и приравняв к нулю действительную и мнимую части, получим уравнения для действительных амплитуды и фазы

$$\begin{cases} \dot{\rho} = \frac{M}{2} \rho (1 - 3\alpha \rho^2), \\ \dot{\varphi} = 0. \end{cases} \quad (31)$$

Из полученной системы укороченных уравнений определим частоту и амплитуду колебаний. Согласно принятому решению

$$\begin{aligned} x &= z e^{jt} + z^* e^{-jt} = \rho e^{j\varphi} e^{jt} + \rho e^{-j\varphi} e^{-jt} = \\ &= \rho (e^{j(t+\varphi)} + e^{-j(t+\varphi)}) = 2\rho \cos(t+\varphi), \end{aligned}$$

но т.к.  $\dot{\varphi} = 0$ , то  $\varphi = \text{const}$ , определяемая начальными условиями. Колебания в таком генераторе происходят на частоте, равной единице в безразмерном виде, или в размерном на  $\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ . Амплитуда колебаний зависит от параметра  $\alpha$ . Рассмотрим стационарные амплитуды, т.е. состояния равновесия укороченных уравнений (31):  $\rho(1 - 3\alpha\rho^2) = 0$ . Следовательно, существует два состояния равновесия уравнения (31) (или, соответственно, две стационарные амплитуды)  $\rho_0 = 0$  и  $\rho_0 = \sqrt{\frac{1}{3\alpha}}$  (или, соответственно, две стационарные амплитуды)  $\rho_0 = 0$  и  $\rho_0 = \sqrt{\frac{1}{3\alpha}}$ .

Зависимость амплитуды колебаний от параметра  $\alpha$  (бифуркационная диаграмма) представлена на рис.18. Из приведенной диаграммы видно, что чем больше нелинейность в системе (коэффициент  $\alpha$ ), тем быстрее наступает ограничение возбуждающихся колебаний и, соответственно, меньше амплитуда колебаний.

Для исследования устойчивости состояния равновесия составим характеристическое уравнение

$$\rho - \frac{\partial F}{\partial \rho} \Big|_{\rho_0} = 0,$$

$$\text{где } F(\rho) = \frac{M}{2} \rho (1 - 3\alpha \rho^2).$$

Следовательно, корни характеристического уравнения определяются соотношением

$$\rho = \frac{M}{2} [(1 - 3\alpha \rho_0^2) + \rho_0 (-6\alpha \rho_0)].$$

Для  $\rho_0 = 0$ ,  $\rho = \frac{M}{2}$ , т.е. это состояние равновесия всегда не-

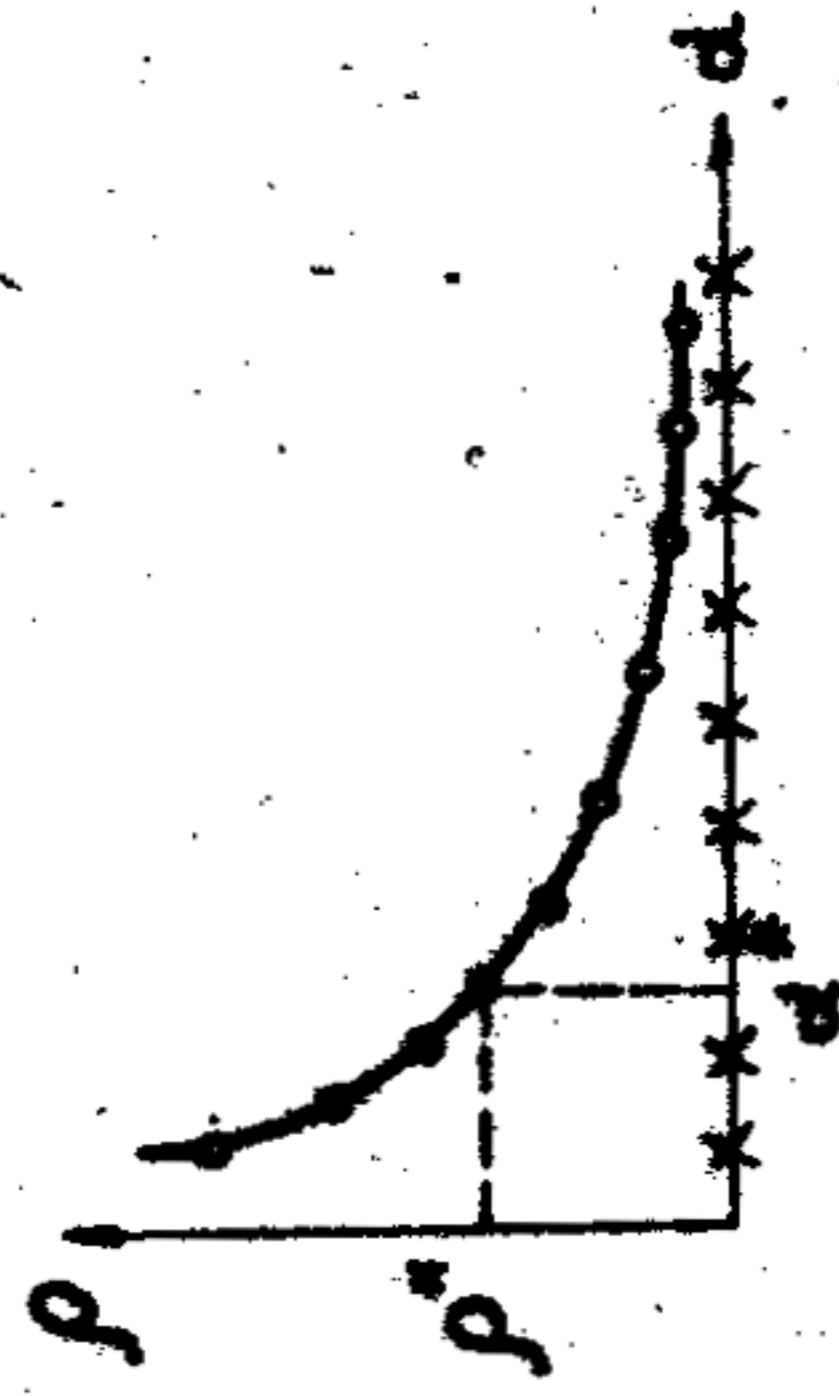


Рис.18

устойчиво, а для

$$\rho_0 = \frac{1}{\sqrt{3\alpha}}, \quad \rho = \frac{M}{2} (\rho_0 (-6\alpha \rho_0)) = -M,$$

т.е. данное состояние равновесия всегда устойчиво. На рис.18 крестиками обозначены неустойчивые, а точками - устойчивые состояния равновесия.

Фазовый портрет системы для некоторого значения параметра

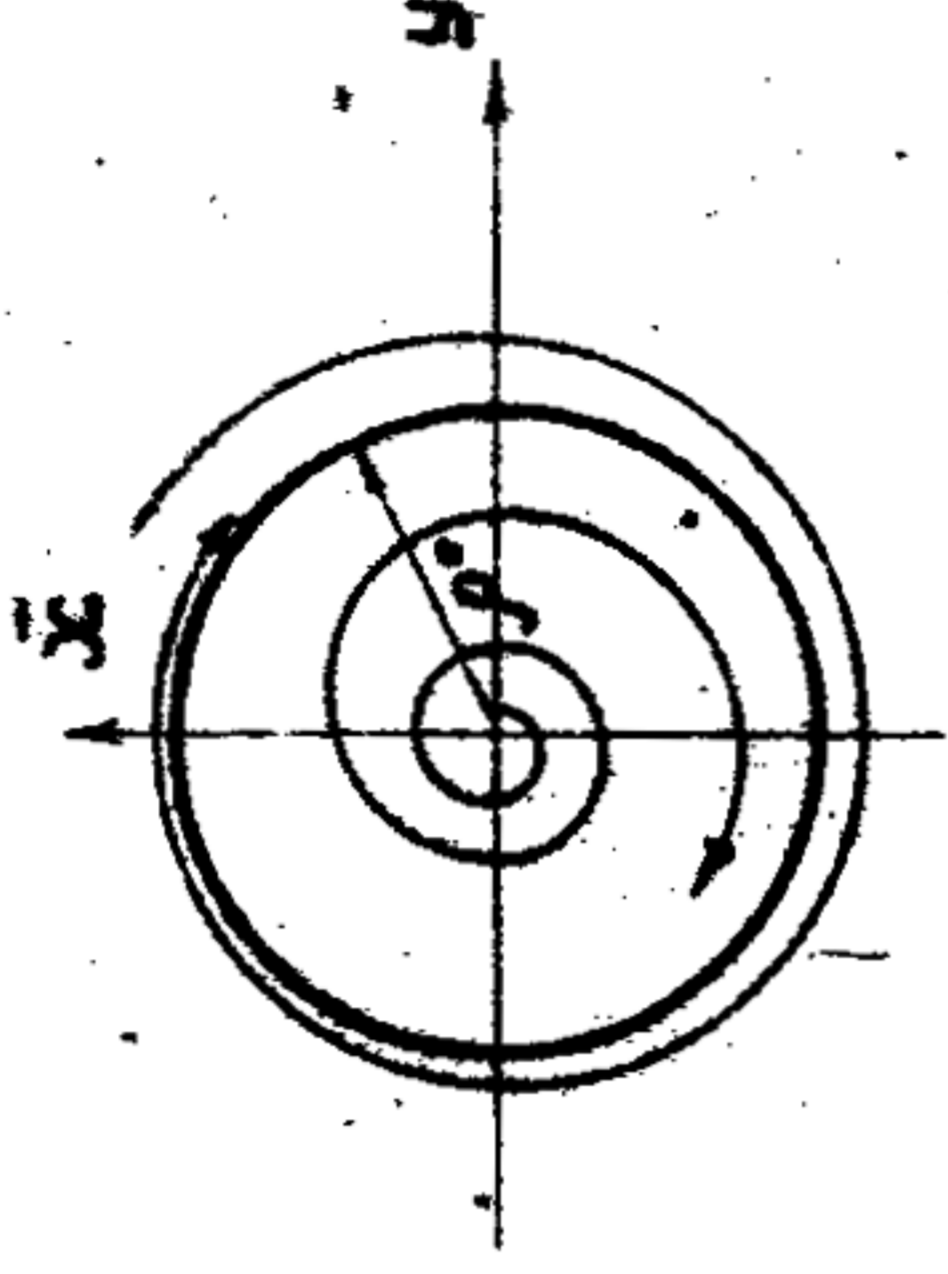


Рис.19

приведен на рис.19. Из приведенного рисунка видно, что при любых начальных условиях система возбуждается (устанавливается) устойчивый предельный цикл), т.е. режим возбуждения колебаний мягкий.

### 3. Литература

#### 3.1. Основная литература

1. А.А.Андронов, А.А.Витт, С.В.Хайкин. Теория колебаний, М., Наука, 1981 (гл.УП, стр.479-500), М., Физматгиз, 1959 (гл.1Х, стр.650-663).

#### 3.2. Дополнительная литература

1. М.И.Рабинович, М.И.Мотова, Т.М.Тарантович. Колебания и волны в нелинейных системах, учебное пособие, изд.ГГУ, 1981 (том 4,5, стр.30-34).  
2. Сб.задач по теории колебаний под ред.Л.В.Постникова, В.И.Королева, М., Наука, 1978 (гл.2 § 2, стр.33-35).  
3. Методы определения устойчивости линеаризованных систем, метод. пособие, изд.ГГУ, 1981 г. (стр.3-10).  
4. Атабеков, Теоретические основы электротехники.

#### 4. Задания

##### 4.1. Задания, выполняемые при подготовке

1. Методика составления уравнений Кирхгофа  
2. Нахождение состояния равновесия [3].  
3. Составление характеристического уравнения и исследование устойчивости и типов состояния равновесия [3].  
4. Знакомство с методом медленно-меняющихся амплитуд и решение за-